



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Espacios de grafos y grafos aleatorios

Sergio Herrero Vila

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Espacios de grafos y grafos aleatorios

Sergio Herrero Vila

Julio 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Topología
Título: Espacios de grafos y grafos aleatorios
Breve descripción do contido
En este trabajo se estudian desde un punto de vista topológico los grafos de Cayley y los grafos de Schreier. Además se aborda una introducción al estudio de los grafos aleatorios.
Recomendacións
Outras observacións

Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Introducción a los grafos	1
2. Grafos de Cayley y casi-isometría	7
2.1. Grafo de Cayley de un grupo	7
2.2. Casi-isometría e isometría a gran distancia	11
2.3. Casi-isometría de grafos	15
3. Grafos de Schreier	17
3.1. Introducción a los Grafos de Schreier	17
3.2. Estructuras de Schreier	19
3.3. Teorema de Petersen-Gross	22
4. Espacios de grafos y grafos aleatorios	27
4.1. Relaciones de equivalencia borelianas, medibles y étales	27
4.2. Espacio de Gromov-Hausdorff	35
4.3. Dinámica del espacio de Gromov-Hausdorff	39
4.4. Minimal de Ghys-Kenyon	44
4.5. Subgrafos aleatorios de grafos de Cayley	49
4.6. Árbol aleatorio de Ghys-Kenyon	53
Conclusiones	55
Bibliografía	57

Resumen

El propósito del trabajo es estudiar diversos aspectos algebraicos, topológicos, geométricos y dinámicos de los *grafos de Cayley* y *Schreier*. Este objetivo se complementa con una introducción al estudio de los *grafos aleatorios*.

El trabajo combina demostraciones originales de aspectos conocidos de los grafos de Cayley y Schreier con el estudio topológico y dinámico del *espacio de Gromov-Hausdorff* de los subgrafos de un grafo de Cayley (introducido originalmente por É. Ghys en [14]) y una introducción al estudio de *grafos aleatorios* (en el sentido de D. Aldous y R. Lyons [4]) a partir del concepto de *subgrafo aleatorio* de un grafo de Cayley. Es un primer paso para la resolución de varios problemas abiertos: la comparación de los espacios de Gromov-Hausdorff asociados a distintos sistemas de generadores, el estudio de la *equivalencia de Kakutani* de grafos aleatorios, y el problema de las decoraciones de Schreier (en un sentido amplio) de los subgrafos aleatorios de grafos de Cayley.

Abstract

The aim of this work is to study several algebraic, topological, geometric and dynamic aspects of *Cayley graphs* and *Schreier graphs*. This objective is also supplemented with a brief study of *random graphs*. This work assembles original proofs of well known concepts about Cayley and Schreier graphs with the topological and dynamic study of the *Gromov-Hausdorff space* of the subgraphs of a Cayley graph (which was first introduced by É. Ghys in [14]). We complete our work with an introduction to random graphs in the sense of D. Aldous and R. Lyons in [4] from the concept of *random subgraph* of a Cayley graph. This is a first step to the resolution of some open problems: the comparison of the Gromov-Hausdorff spaces asociated to different systems of generators, the study of the *Kakutani's equivalence* of random graphs, and the problem of Schreier decorations (in a wide sense) of random subgraphs of a Cayley graph.

Introducción

En este trabajo se abordan varios aspectos conocidos de la teoría de grafos. El primer capítulo consiste en una introducción de los conceptos esenciales sobre grafos que nos servirán para entender con soltura la teoría de los apartados siguientes. En el siguiente capítulo se introduce el concepto de *grafo de Cayley* de un grupo, que será un pilar fundamental sobre el que se apoyarán la mayor parte de los conceptos de este texto y nos centraremos en el estudio de grafos de Cayley de grupos finitamente generados con conjuntos de generadores simétricos. Veremos además que se puede dotar a este tipo de grafos de una métrica natural que nos permitirá estudiarlos, no solo como objeto combinatorio, sino como un espacio métrico. En este mismo capítulo se define la noción de *casi-isometría*, tal y como se introduce en [17], una propiedad geométrica que relaciona los grafos de Cayley de un mismo grupo obtenidos a partir de distintos sistemas de generadores. Seguiremos con un estudio de los *grafos de Schreier*, que vienen a extender la definición de los grafos de Cayley ya que en este caso el conjunto de vértices es el cociente de un grupo por un subgrupo del mismo, que no tiene por qué ser normal de manera que hay una mayor diversidad de grafos sin perder transitividad. La última sección de este capítulo consiste en una serie de resultados que además de ilustrarnos algunas propiedades interesantes de los grafos de Schreier, nos permiten demostrar el teorema principal, incluido en [7] y debido a J. Petersen y J. Gross, sobre la existencia de estructuras de Schreier, que nos dice que cualquier grafo no orientado (u orientado de una manera específica) $2n$ -regular admite una estructura de Schreier.

La segunda parte de este texto se centra en el estudio de los espacios de grafos y los grafos aleatorios. El cuarto capítulo comienza con un breve recordatorio de algunos resultados y definiciones de la teoría de la medida que posteriormente aplicaremos en los grafos aleatorios, destacando entre ellos el concepto de *relación de equivalencia medible discreta* y de *medida ergódica* así como el último lema de la sección, formulado en [3] por F. Alcalde, Á. Lozano y A. C. Vázquez, que se empleará para demostrar algunos de los resultados más interesantes sobre subgrafos aleatorios. En las siguientes dos secciones del capítulo se estudiará el espacio de *Gromov-Hausdorff*, que consiste en el espacio de subgrafos conexos

de un grafo de Cayley que contienen al elemento neutro del grupo subyacente. Además, de forma similar a como se hizo con los grafos de Cayley, se dotará a este espacio de una métrica y una estructura de grafo así como de una relación de equivalencia que consiste en el cambio de punto base. Veremos que esta relación de equivalencia es *étale* y la importancia que cobra más tarde en el estudio de grafos aleatorios. Estudiaremos también los conceptos de *aperiodicidad* y *repetitividad* de subgrafos de un grafo de Cayley y su traducción en el espacio de Gromov-Hausdorff, que pueden verse de forma más detallada en [26]. Seguidamente se recupera un ejemplo interesante de subárbol repetitivo del grafo de Cayley de \mathbb{Z}^2 , llamado *árbol de Kenyon*. Veremos su construcción a partir de una sucesión creciente de árboles y estudiaremos su envoltura, es decir, la clausura de su clase de equivalencia por la relación de cambio de punto base, llamado *minimal de Ghys-Kenyon*. En las siguientes secciones se definirá el concepto de *subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley*, se verán algunas de sus características y se mostrarán ejemplos de su construcción mediante un método llamado *proceso de percolación*, que asigna una probabilidad a cada arista de un grafo de Cayley indicándonos si la arista pertenece o no al grafo resultante según esté etiquetada con 1 o 0. De esta forma construimos subgrafos recubridores con aristas distribuidas de modo aleatorio. Se estudiarán además algunas propiedades de las medidas en los subgrafos aleatorios, como la *tolerancia a la inserción*. Por último, recuperaremos el ejemplo del conjunto minimal de Ghys-Kenyon y lo convertiremos en un grafo aleatorio definiendo una medida de probabilidad invariante por el cambio de punto base y ergódica. Para ello usaremos *sucesiones de Følner*, descritas por S. E. Goodman y J. F. Plante en [16].

Capítulo 1

Introducción a los grafos

Antes de comenzar el estudio de los grafos de Cayley realizaremos una breve revisión de conceptos básicos sobre grafos que se utilizarán en los siguientes capítulos de este trabajo.

Definición 1.1. Un *grafo* es un par ordenado de conjuntos disjuntos $G = (V, E)$ donde $V = V(G)$ denota el conjunto de vértices y $E = E(G)$ el conjunto de aristas con una aplicación

$$\begin{aligned}\Phi : E &\longrightarrow V \times V \\ e &\longmapsto (x, y)\end{aligned}$$

que lleva cada elemento de E en un par de $V \times V$. Habitualmente se supone que $V \neq \emptyset$ y E son numerables. Si son finitos, diremos que G es *finito*.

Observación 1.2. En lo que sigue vamos a suponer que la aplicación Φ es inyectiva, lo que significa que no existen *aristas múltiples*, es decir, aristas distintas que unen los mismos dos vértices ordenados. Asumiendo que no existe este tipo de arista, podemos considerar E el conjunto de aristas como un subconjunto de $V \times V$.

Observación 1.3. Un grafo finito o infinito puede pensarse como un CW-complejo de dimensión 1. El 0-esqueleto es el conjunto de vértices, que es un conjunto discreto, y el 1-esqueleto está formado por las aristas.

Si un par $(v_1, v_2) \in E$ o su opuesto $(v_2, v_1) \in E$ (es decir, si hay una arista que conecta v_1 y v_2), entonces diremos que v_1 y v_2 son *adyacentes* o *vecinos*. Esto lo denotaremos como $v_1 \sim v_2$ (a pesar de esta notación "ser adyacentes" no es en general una relación de equivalencia). También decimos que v_1 y v_2 son incidentes con la arista $(v_1, v_2) \in E$ o que la arista es incidente con ellos.

Notación 1.4. Normalmente escribiremos $x \in G$ refiriéndonos realmente a $x \in V(G)$ y, ocasionalmente si no da lugar a confusión, también escribiremos $(x, y) \in G$ en lugar de $(x, y) \in E(G)$.

Definición 1.5. La *valencia* de un vértice $v \in V(G)$ que denotamos como $val(v)$ es el número de aristas que unen dicho vértice con sus vecinos. También podemos definir la *valencia saliente*, $val_s(v)$, como el número de aristas que tienen por origen al vértice v y la *valencia entrante*, $val_e(v)$, como el número de aristas que acaban en v (que tienen por extremo v). Es claro que $val(v) = val_e(v) + val_s(v)$.

Un grafo se dice *localmente finito* si la valencia es finita en cada vértice y decimos que es de *geometría acotada* cuando, además, la valencia está uniformemente acotada, esto es, $\exists M \in \mathbb{N}$ t.q. $val(v) < M, \forall v \in V$. Obsérvese que dicha constante M es independiente del vértice considerado, lo que significa que el número de ramificaciones no aumenta. La máxima valencia de los vértices de un grafo G se denota $\Delta(G)$ y la mínima $\delta(G)$. Si un vértice tiene valencia cero se dice que es un vértice *aislado*. Diremos que un grafo es *regular* (o *n-regular*) si $\Delta(G) = \delta(G) = n$, es decir, si todos los vértices tienen la misma valencia.

Dada una arista $(v_1, v_2) \in E$, diremos que v_1 y v_2 son los *extremos*. Dos aristas son *adyacentes* si tienen exactamente un extremo en común.

Definición 1.6. Dado un grafo $G = (V, E)$ diremos que $G' = (V', E')$ es un *subgrafo* de G si $V' \subset V$ y $E' \subset E$. En este caso escribimos $G' \subset G$ (aunque no es un contenido conjuntista). Si G' contiene todas las aristas de G que unen dos vértices de V' , entonces a G' se le llama *subgrafo inducido* en V' y lo denotamos como $G[V']$. De esta forma un subgrafo G' de G es un subgrafo inducido si y solo si $G' = G[V']$. Un subgrafo $G' = (V', E')$ tal que $V' = V$ se dice *subgrafo recubridor*.

Ejemplo 1.7. El siguiente es un ejemplo de un grafo G y de varios posibles subgrafos de éste.

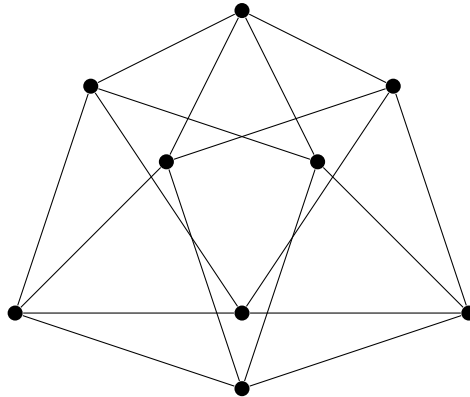


Figura 1.1: Grafo G

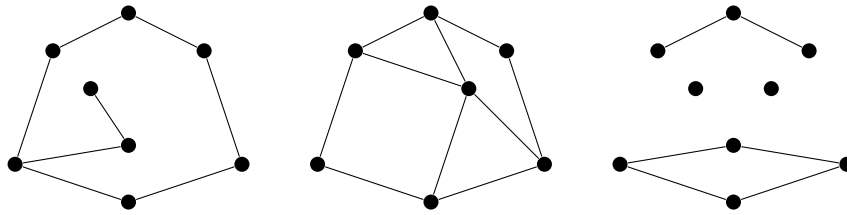


Figura 1.2: Un subgrafo, un subgrafo inducido y subgrafo recubridor del grafo G en 1.1

Observación 1.8. Siguiendo esta idea, a partir de un grafo $G = (V, E)$ podemos construir nuevos grafos añadiendo o quitando vértices y aristas.

Si $W \subset V(G)$, entonces $G - W = G[V \setminus W]$ es el subgrafo de G obtenido quitando todos los vértices de W y todas las aristas incidentes con ellos. De forma parecida, si tomamos $E' \subset E(G)$, podemos considerar $G - E' = (V(G), E(G) \setminus E')$. De igual forma podemos añadir nuevas aristas, por ejemplo, si $x, y \in V$, podemos considerar $G + (x, y)$ que es el grafo G añadiendo el par (x, y) a E , lo que se traduce en unir estos dos vértices $x, y \in V$ en una arista del primero al segundo.

Definición 1.9. El *orden* de un grafo $G = (V, E)$, es el número de vértices de éste, que notaremos como $|G|$ o $\#G$. Paralelamente definimos el *tamaño* de un grafo como el número de aristas de G , y lo denotaremos por $e(G)$. Se observa que el máximo tamaño que puede tener un grafo es $|G|^2$ y sería $|G|(|G| - 1)$ si considerásemos un grafo sin bucles.

Definición 1.10. Dados dos subconjuntos U y W del conjunto de vértices de un grafo $G = (V, E)$, escribiremos $E(U, W)$ para el conjunto de $U - W$ aristas, es decir, para el conjunto de aristas que unen cada vértice de U con un vértice de W . Entonces $e(U - W) = \#E(U, W)$ es el número de $U - W$ aristas. Si queremos enfatizar que nuestro grafo subyacente es G podemos escribir $E_G(U, W)$ y $e_G(U, W)$.

Definición 1.11. En un grafo $G = (V, E)$, dada una arista $e = (v_1, v_2)$ con *origen* $s(e) = v_1$ y *extremo* $r(e) = v_2$, podemos considerar la *arista opuesta* $e^- = (v_2, v_1)$, que pertenecerá o no al grafo G . Diremos que el grafo G es no orientado si el conjunto E es simétrico, es decir, si $(v_1, v_2) \in E$ entonces también $(v_2, v_1) \in E$. En este caso la arista (v_1, v_2) se confunde con la arista (v_2, v_1) y escribir simplemente $\{v_1, v_2\}$.

Definición 1.12. Un *camino* en un grafo orientado o no es una sucesión de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ tales que cada par de vértices consecutivos son el origen y el extremo de una arista en el grafo, es decir, $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ para cada $i = 1, \dots, n - 1$. Si la sucesión de vértices es infinita se trata de un *camino infinito*. La *longitud* de un camino es el número de aristas que lo forman. Se llama *lazo* o *camino cerrado* a un camino finito $\{v_1, \dots, v_n\}$ tal que

$v_1 = v_n$ y *ciclo* a un lazo o camino cerrado que pasa una sola vez por los restantes vértices. Si una arista es de la forma $e = (v, v)$ entonces diremos que e es un *bucle*. Diremos que un grafo es *conexo* si dados dos vértices arbitrarios existe un camino que los une. A partir de ahora, salvo mención explícita de lo contrario, el término grafo se aplicará únicamente a grafos no orientados sin bucles ni aristas múltiples. Un *árbol* es un grafo conexo y acíclico, esto es, un grafo en el que dos vértices cualesquiera están unidos por un solo camino.

En un grafo localmente finito $G = (V, E)$ podemos considerar una métrica natural de forma que la distancia entre dos vértices es el mínimo de las longitudes de los caminos que los unen. (Esta métrica no tendría cabida en un grafo que no fuese conexo pues podría no existir ningún camino entre dos puntos). Si un camino minimiza la distancia entre sus extremos decimos que es un *camino geodésico*. Además podemos dotar a cada arista del grafo que una dos vértices distintos de una métrica que la haga isométrica al intervalo $[0, 1]$ y a los bucles isométricos a S^1 ; de esta forma, nuestra métrica se extiende a todo el grafo haciendo de este un espacio métrico localmente compacto. Si el grafo no es localmente finito, entonces es necesario dotarlo de la topología que lo convierte en un CW-complejo.

Observación 1.13. En un árbol todos los caminos son geodésicos porque dados dos vértices existe un único camino que los une.

Definición 1.14. Sea X un espacio topológico Hausdorff e Y un espacio localmente compacto Hausdorff. Si $f : X \rightarrow Y$ es tal que $f^{-1}(K) \subseteq X$ es compacto $\forall K \subseteq Y$ compacto entonces decimos que f es una aplicación *propia*.

Definición 1.15. Sea (X, d) un espacio métrico localmente compacto.

- Se llama *geodésica* a una aplicación isométrica $c : [0, l] \rightarrow X$ con $l \in \mathbb{R}$, y se llama *segmento geodésico* a $c([0, l])$, donde $c(0)$ y $c(l)$ se denominan *origen* y *extremo* respectivamente (al igual que sucedía con los extremos de las aristas en los grafos).
- Se dice que (X, d) es un *espacio geodésico* si dados $x, y \in X$ existe una geodésica c tal que $c(0) = x$ y $c(l) = y$ o $c(0) = y$ y $c(l) = x$. Decimos entonces que $c([0, 1])$ es un camino geodésico que une a x y a y .
- Un *rayo* de X es una aplicación $r : [0, +\infty] \rightarrow X$ continua y propia. Si además r es una isometría diremos que es un *rayo geodésico*.

Observación 1.16. Cabe destacar que los segmentos geodésicos (respectivamente los rayos geodésicos) se corresponden en un grafo con los caminos geodésicos finitos (respectivamente infinitos).

Definición 1.17. Se dice que dos rayos r y r' *convergen al mismo final* si para todo compacto $K \subseteq X$ existe un entero $N \in \mathbb{N}$ tal que $r([N, \infty])$ y $r'([N, \infty])$ están en la misma componente conexa de $X \setminus K$. Esta convergencia define una relación de equivalencia y la clase de un rayo r se denota $\mathcal{E}(r)$. El conjunto cociente de X con la relación de equivalencia "converger al mismo final" se denomina *espacio de finales* de X .

Definición 1.18. Dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son *isomorfos* si existe una biyección $\phi : V \rightarrow V'$ entre sus conjuntos de vértices de forma que, $\forall v_1, v_2 \in V$,

$$(v_1, v_2) \in E \Leftrightarrow (\phi(v_1), \phi(v_2)) \in E',$$

es decir que exista una aplicación biyectiva que conserva la adyacencia en ambos sentidos. A esta aplicación ϕ se le llama *isomorfismo de grafos*, o, en este contexto, simplemente isomorfismo. Que dos grafos G, H sean isomorfos lo notaremos como $G \cong H$ o sencillamente $G = H$ ya que como un isomorfismo no es más que un reetiquetado de los vértices y las aristas no distinguiremos usualmente entre grafos isomorfos. Un invariante de un grafo G es un número asociado a G que tiene el mismo valor para cualquier grafo isomorfo a G .

Definición 1.19. El conjunto de vértices adyacentes a $x \in G$ se conoce como *vecindad* de x y coincide con la frontera del conjunto de vértices que se encuentran a distancia ≤ 1 de x , es decir, $B(x, 1)$ (es la bola cerrada), entonces

$$\partial B(x, 1) = \{y \in G : (x, y) \in E(G)\} = \{y \in G : x \sim y\} = \{y \in G, y \neq x : d(x, y) \leq 1\}$$

Según esta notación $x \sim y$ es equivalente a $y \in \partial B(x, 1)$.

Observación 1.20.

- al conjunto $B(x, 1) = \partial B(x, 1) \cup \{x\}$ se llama *entorno cerrado* de x .
- Igual que en la definición 1.10 si queremos enfatizar que nuestro grafo subyacente es G escribiremos $val_G(x)$ y $\partial B_G(x, 1)$. Esta notación nos permite definir entornos relativos a subgrafos de la siguiente forma, si $H = G[W]$, entonces

$$B_H(x, 1) = \{y \in H : y \in B(x, 1)\} = B_G(x, 1) \cap W$$

- También se puede definir el entorno de un subconjunto del conjunto de vértices de la siguiente forma, si $W \subset V(G)$, entonces

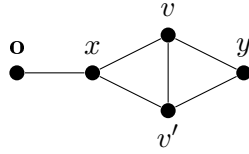
$$B(W, 1) = \{y \in G : y \in B(x, 1) \text{ para algún } x \in W\}.$$

- Nótese que $B(x, 1)$ es compacta si y solo si el grafo subyacente es localmente finito.

Notación 1.21. A veces a $\partial B(x, 1)$ se le denota como $\Gamma(x)$. Además, si el grafo G contiene bucles, consideraremos que si $(x, x) \in E(G)$ entonces $x \in \Gamma(x)$, a pesar de que $x \notin \partial B(x, 1)$.

Definición 1.22. Un *grafo enraizado* es un grafo con un vértice fijado que se denota por \mathbf{o} y se llama *raíz* u *origen*. Podemos pensar en esta raíz como una referencia del grafo. Dados dos vértices v y v' vecinos se dice que v' es *hijo de* v o que v es *padre de* v' si $d(v', \mathbf{o}) > d(v, \mathbf{o})$. Decimos que una arista en un grafo enraizado es terminal si uno de sus vértices finales no tiene descendencia, i.e, no es padre de ningún otro vértice. Si T es un árbol enraizado entonces, dado $v \in T$, denotamos por T^v al subárbol formado por v y sus descendientes.

Observación 1.23. Dados dos vértices vecinos en un grafo enraizado no siempre podemos encontrar una relación de parentesco y puede ocurrir que dos vértices sean padres del mismo hijo, como se aprecia en la figura 1, donde v y v' no tienen relación de parentesco porque $d(v, \mathbf{o}) = d(v', \mathbf{o}) = 2$ y v y v' son ambos padres de y e hijos de x .



Capítulo 2

Grafos de Cayley y casi-isometría

2.1. Grafo de Cayley de un grupo

Definición 2.1. Sea G un grupo finitamente generado y $S = \{s_i\}_{i \in I}$ un sistema finito de generadores. El *grafo de Cayley* $\mathbb{G} = \mathbb{G}(G, S)$ construido a partir de G con respecto a S es el grafo \mathbb{G} cuyos vértices son los elementos del grupo G y dos vértices $g, g' \in G$ son adyacentes, es decir, $(g, g') \in E(\mathbb{G})$ si y solo si $g' = gs$ para algún $s \in S$; esto es, si $g^{-1}g' \in S$.

En la literatura se puede encontrar también la siguiente definición equivalente de grafo de Cayley:

Definición 2.2. El grafo de Cayley de G respecto del sistema de generadores S es el grafo orientado $\mathbb{G}(G, S) = (G, E_S)$ donde E_S está formado por los pares (g, gs) , $s \in S$.

En la mayoría de los casos supondremos S un conjunto de generadores simétrico, i.e., $S = S^{-1}$. De este modo, siempre que tengamos una arista entre dos vértices tendremos también la arista contraria, de lo que deducimos que el grafo de Cayley de un grupo a partir de un conjunto de generadores simétrico es un grafo no orientado. También supondremos que el elemento neutro 1 no pertenece a S , de manera que G carece de bucles. Es natural etiquetar las aristas del grafo de Cayley con los elementos $s \in S$. Cabe destacar también que los grafos de Cayley heredan la homogeneidad del grupo del que proceden, es decir, si sabemos cómo es un grafo de Cayley en un entorno de un vértice, sabemos cómo es la estructura de todo el grafo.

Se sigue de la definición 2.1 que un grafo de Cayley es un grafo, localmente finito, sin bucles ni aristas múltiples, no orientado si el conjunto de generadores es simétrico y que depende tanto del grupo como del sistema de generadores.

Observación 2.3. Dado un grafo de Cayley $\mathbb{G} = \mathbb{G}(G, S)$, la acción por la izquierda del grupo G sobre sí mismo define una acción por la izquierda de G como grupo de automorfismos de \mathbb{G} . En efecto, el grupo G actúa naturalmente sobre las aristas de la siguiente forma:

$$g.(g', g's) = (gg', gg's).$$

Dado que la acción de un grupo sobre sí mismo es trivialmente transitiva, el grafo \mathbb{G} es *transitivo*, i.e., para cualquier par de vértices existe un automorfismo del grafo que envía un vértice sobre otro. Además, como sobre cada vértice $g \in G$ actúan siempre todos los generadores de S (donde solo incluiremos uno de los generadores, s o s^{-1}) y existen $\#S$ vértices distintos de forma que $g's = g$ se tiene que el grafo es $2\#S$ -regular ya que la valencia entrante y la saliente en cada vértice coinciden y son exactamente $\#S$.

Definición 2.4. Se llama *longitud* de un elemento $g \in G$ al número mínimo de generadores de S y sus inversos, es decir, al número de elementos de $S \cup S^{-1}$ necesarios para escribir g , formalmente,

$$\text{long}_S(g) = \{\text{mín } n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } g = s_1 \dots s_n, \text{ con } s_i \in S \cup S^{-1}\},$$

y se define la *distancia de las S -palabras* entre dos elementos g y g' de G como

$$d_S(g, g') = \text{long}_S(g^{-1}g'),$$

que coincide con la métrica natural de la que dotábamos a un grafo, pues el mínimo número de aristas necesarias para llegar de g a g' es precisamente el mínimo número de generadores necesarios s_1, \dots, s_n , para escribir g' como $g' = gs_1 \dots s_n$. Observemos que la distancia de las palabras sobre G coincide con la distancia inducida por la distancia de grafo sobre el conjunto de vértices. Luego podemos pensar en el grafo de Cayley \mathbb{G} como un espacio métrico (\mathbb{G}, d_S) donde las aristas son isométricas al intervalo $[0, 1]$.

Los grafos de Cayley son conexos y si el conjunto de generadores considerado es simétrico también son fuertemente conexos. En la observación 3.4 nos pararemos en detenimiento a explicar este hecho en un marco más general.

Ejemplo 2.5. Ahora veremos unos ejemplos de grafos de Cayley de grupos bien conocidos con distintos sistemas de generadores.



Figura 2.1: $G = \mathbb{Z}$, $S = \{\pm 1\}$

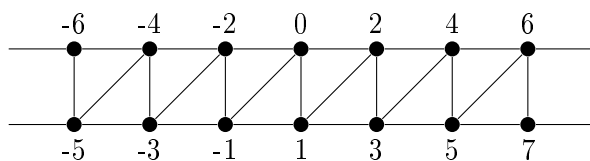


Figura 2.2: $G = \mathbb{Z}$, $S = \{\pm 1, \pm 2\}$

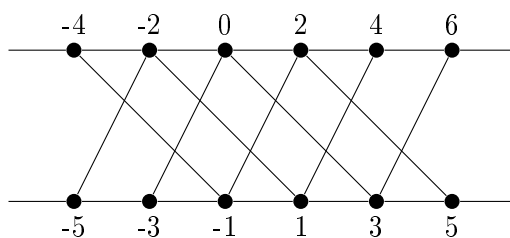


Figura 2.3: $G = \mathbb{Z}$, $S = \{\pm 2, \pm 3\}$

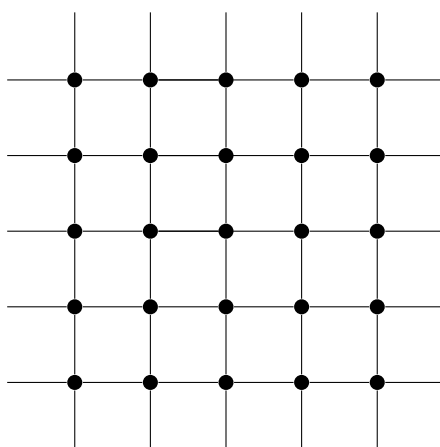


Figura 2.4: $G = \mathbb{Z}^2$, $S = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$

Como se aprecia en las figuras 2.1, 2.2 y 2.3 el grafo de Cayley de un grupo sí depende de la elección del conjunto de generadores. Sin embargo, veremos en la siguiente sección que hay una relación entre los distintos grafos de Cayley de un grupo obtenidos cambiando el sistema de generadores.

Recordemos brevemente la definición de grupo libre.

Definición 2.6. Un grupo G se dice *libre* si existe un subconjunto S de G de tal manera que todo elemento de G se puede escribir de forma única como producto de un número finito de elementos de S y sus inversos descontando las variaciones triviales como $ss^{-1} = 1$.

Notación 2.7. Al grupo libre sobre S lo denotaremos por F_S , y se puede construir como sigue:

$$F_S = \{s_1 \dots s_n s_{n+1} \dots s_{n+m} : s_i \in S, n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Es decir, está formado por cualquier palabra finita construida con elementos de S y sus inversos. Además, hay que tener en cuenta que se trata de palabras reducidas que no contienen elementos de la forma ss^{-1} . Realmente estamos considerando F_S como el conjunto cociente de las palabras reducidas de S y sus inversos dotado de la ley de grupo definida por la concatenación de palabras.

Veamos entonces un grafo de Cayley asociado a un grupo libre.

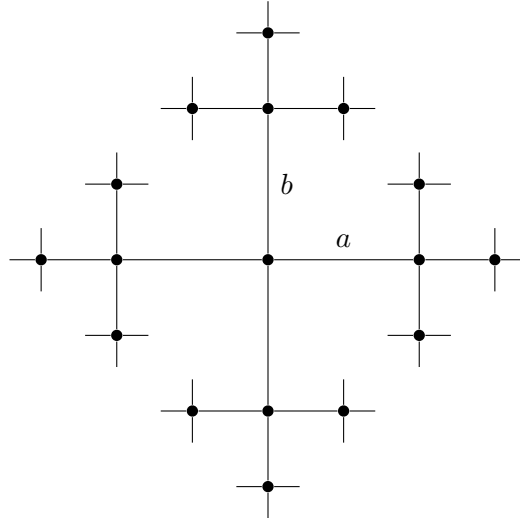


Figura 2.5: $\mathbb{G} = \mathbb{G}(G, S)$ donde $G = F_S = \langle a, b \rangle$ y $S = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$, es decir, el grupo libre de dos generadores.

Dado un grafo de Cayley $\mathbb{G} = \mathbb{G}(G, S)$, la acción natural por la izquierda de G sobre \mathbb{G} como grupo de automorfismos determina una acción por isometrías de G sobre (\mathbb{G}, d_S) : sobre los vértices está dada por

$$(g, x) \mapsto gx,$$

y sobre las aristas la traslación g está dada por:

$$(g, (x, xs)) \mapsto (gx, gxs),$$

Proposición 2.8. *La acción de G sobre \mathbb{G} es propiamente discontinua y libre si el grupo G no contiene elementos de orden 2.*

Demostración. Como la acción de G sobre sí mismo es libre, la acción de G sobre \mathbb{G} será libre si y solo si ningún elemento de G intercambia los extremos de una arista, es decir, si ningún elemento de G tiene orden 2. Como (\mathbb{G}, d_S) es un espacio de Heine-Borel, ya que las bolas cerradas son compactos, el hecho de que G actúe por isometrías nos garantiza que la acción es propiamente discontinua. Para una demostración explícita de esta afirmación puede consultarse [8]. \square

Es interesante mencionar el siguiente teorema que justifica en gran medida el interés de los grafos de Cayley.

Teorema 2.9 (del subgrupo de Kurosh). *Si $G = G_1 * \dots * G_n$ es producto libre de un número finito de grupos libres, y H es un subgrupo de G , entonces $H = H_1 * \dots * H_n$, donde $H_i < G_i$ (salvo conjunción).*

Teorema 2.10 (Nielsen-Schreier). *Si G es un grupo libre finitamente generado y H un subgrupo de G , entonces H es un grupo libre.*

La demostración de este teorema puede verse en [8] y [33].

Observación 2.11. El subgrupo H no tiene por qué ser finitamente generado.

2.2. Casi-isometría e isometría a gran distancia

Sean (X, d) y (X', d') dos espacios métricos.

Definición 2.12. Una aplicación $f : X \rightarrow X'$ (no necesariamente continua) es una *casi-isometría* si existen constantes $C_1 > 0$ y $C_2 \geq 0$ tales que para cualesquier $x, y \in X$ se tiene:

$$(i) \quad \frac{1}{C_1}d(x, y) - C_2 \leq d'(f(x), f(y)) \leq C_1d(x, y) + C_2,$$

(II) $\forall x' \in X'$ se verifica $d'(f(X), x') \leq C_2$.

Cuando existe dicha función se dice que X y X' son *casi-isométricos*. Si además $C_1 = 1$ se dice que X y X' son *isométricos a gran distancia* y llamaremos a f *isometría a gran distancia*.

Definición 2.13. Dos espacios métricos (X, d) y (X', d') son *casi-isométricos* si existen aplicaciones lipschitzianas a gran distancia $f : X \rightarrow X'$ y $g : X' \rightarrow X$ tales que:

$$(I) \quad d'(f(x), f(y)) \leq C_1 d(x, y) + C_2, \quad \forall x, y \in X,$$

$$(II) \quad d'(g(x'), g(y')) \leq C_1 d'(x', y') + C_2, \quad \forall x', y' \in X',$$

$$(III) \quad d(g \circ f(x), x) \leq C_2, \quad \forall x \in X,$$

$$(IV) \quad d(f \circ g(x'), x') \leq C_2, \quad \forall x' \in X',$$

donde $C_1 > 0$ y $C_2 \geq 0$ son las constantes correspondientes.

Ahora vamos a recordar un par de conceptos topológicos que nos servirán para dar la última definición de casi-isometría que será la que realmente utilicemos en la práctica.

Definición 2.14. Dado un número real $C \geq 0$, una C -red de un espacio métrico (X, d) es un subconjunto $A \subset X$ tal que $d(x, A) \leq C$ para todo $x \in X$. Decimos que una C -red es δ -separada si $\exists \delta > 0$ tal que $d(a, b) > \delta$ para cada par $a, b \in A$. Cabe destacar que si A es una C -red de X entonces es una C' -red para cualquier $C' \geq C$.

Definición 2.15. Dos espacios métricos (X, d) , (X', d') se dice que son *lipschitzianamente equivalentes* si existe una aplicación $l : X \rightarrow X'$ bilipschitziana, es decir, una aplicación biyectiva para la cual existe una constante $c > 0$ (llamada constante de Lipschitz) de forma que

$$\frac{1}{c} d(x, y) \leq d'(l(x), l(y)) \leq c d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Esta definición es equivalente a decir que $l : X \rightarrow X'$ es una aplicación biyectiva y lipschitziana con inversa también lipschitziana ya que por ser tanto l como l^{-1} inyectivas las dos constantes de Lipschitz serán mayores que cero y bastará considerar el máximo para adaptarse a la definición anterior.

La siguiente definición es la definición original de M. Gromov [17, 18].

Definición 2.16. Dos espacios métricos (X, d) y (X', d') son *casi-isométricos* si existen dos C -redes A y A' , de X y X' respectivamente, que son lipschitzianamente equivalentes. Si además A y A' son isométricas (es decir, existe $f : A \rightarrow A'$ tal que $d(x, y) = d(f(x), f(y))$, $\forall x, y \in A$) entonces se dice que X y X' son *isométricos a gran distancia*.

Observación 2.17. Obsérvese que no es restrictivo suponer que A y A' son C -redes con la misma constante $C \geq 0$ ya que si tuviésemos una C_1 -red A y una C_2 -red A' , siempre podemos tomar el máximo de $C_1, C_2 \geq 0$ de ambas redes y tendríamos que ambas serían $\max\{C_1, C_2\}$ -redes.

Teorema 2.18. *Las tres definiciones 2.12, 2.13 y 2.16 son equivalentes.*

Demostración. (2.16) \Rightarrow (2.13) Sea $l : A \rightarrow A'$ la aplicación bilipschitziana entre las C -redes A y A' de X y X' respectivamente y sea $c \geq 1/2$ una constante de Lipschitz de l . Definimos las aplicaciones $f : X \rightarrow X'$ y $g : X' \rightarrow X$ de la siguiente manera: $f(x) = l(a_x)$ y $g(x') = l^{-1}(a'_{x'})$ siendo $a_x \in A$ un elemento tal que $d(x, a_x) \leq C$ y $a'_{x'} \in A'$ tal que $d(x', a'_{x'}) \leq C$ y además tales que $f(g(x')) = a'_{x'}$ y $g(f(x)) = a_x$. Para cada $x \in X$ podemos escoger un elemento a_x con estas características de entre todos los $a_x \in A$ tales que $d(a_x, x) \leq C$ por el axioma de elección y lo mismo con $x' \in X'$. Veamos que se verifican las condiciones de la definición 2.13 para las constantes $C_1 = c$ y $C_2 = 2Cc$. En efecto, tenemos:

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(y)) &= d'(l(a_x), l(a_y)) \\ &\leq cd(a_x, a_y) \\ &\leq c(d(a_x, x) + d(x, y) + d(y, a_y)) \\ &\leq c(d(x, y) + 2C) = cd(x, y) + 2cC, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d(g(x'), g(y')) &= d'(l^{-1}(a'_{x'}), l^{-1}(a'_{y'})) \\ &\leq cd(a'_{x'}, a'_{y'}) \\ &\leq c(d'(a'_{x'}, x') + d'(x', y') + d'(y', a'_{y'})) \\ &\leq c(d'(x', y') + 2C) = cd'(x', y') + 2cC. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} d(g \circ f(x), x) &= d(a_x, x) \leq C \leq 2cC, \\ d'(f \circ g(x'), x') &= d(a'_{x'}, x') \leq C \leq 2cC, \end{aligned}$$

Para todo $x, y \in X$ y $x', y' \in X'$.

(2.13) \Rightarrow (2.16) Sean $f : X \rightarrow X'$ y $g : X' \rightarrow X$ las aplicaciones lipschitzianas a gran distancia de la definición 2.13 con constantes de Lipschitz $C_1 > 0$ y $C_2 \geq 1$. Tomamos $A = g \circ f(X)$ y $A' = f \circ g(X')$. Veamos que, en efecto, A y A' son $2C_2$ redes. Para cualquier $x \in X$ existe $g \circ f(x) \in A$ tal que $d(x, g \circ f(x)) \leq C_2 \leq 2C_2$. Del mismo modo, para cada $x' \in X'$ existe $f \circ g(x') \in A'$ tal que $d(x', f \circ g(x')) \leq C_2 \leq 2C_2$. Podemos considerar A y A' $2C_2$ -separadas sin más que eliminar los suficientes elementos para que lo sean preservando

la propiedad de $2C_2$ -red, es decir, estamos estableciendo un único representante en las bolas cerradas de radio C_2 , una vez más, apoyándonos en el axioma de la elección. Construyamos ahora la aplicación bilipschitziana $l : A \rightarrow A'$ entre las C_2 -redes. Definimos $l(a) = f(a)$ y, como la red es $2C_2$ separada y la distancia entre $g \circ f(x)$ y x es menor o igual a C_2 . Lo mismo ocurre con la distancia entre $f \circ g(x')$ y x' , y tomamos $l^{-1}(a') = g(a')$, ya que los representantes de $g \circ f(x)$ y de $f \circ g(x')$ son x y x' respectivamente. La aplicación l es bilipschitziana puesto que, para cada par $a, b \in A$, $a \neq b$ (si no se da trivialmente la desigualdad), tenemos:

$$\begin{aligned} d'(l(a), l(b)) &= d'(f(a), f(b)) \\ &\leq C_1 d(a, b) + C_2 \\ &\leq C_1 d(a, b) + C_2 d(a, b) = (C_1 + C_2) d(a, b), \end{aligned}$$

y para cada $a', b' \in A'$ tales que $l(a) = a'$ y $l(b) = b'$ tenemos:

$$\begin{aligned} d(a, b) &= d(l^{-1}(a'), l^{-1}(b')) \\ &= d(g(a'), g(b')) \\ &\leq C_1 d'(a', b') + C_2 \\ &\leq C_1 d'(a', b') + C_2 d'(a', b') \\ &\leq (C_1 + C_2) d'(a', b') = (C_1 + C_2) d'(l(a), l(b)). \end{aligned}$$

Luego l es bilipschitziana con constante de Lipschitz $C_1 + C_2$. (2.12) \Leftrightarrow (2.16) La prueba de esta equivalencia es análoga a la de las anteriores implicaciones, solo que en este caso $f(X)$ será la red de X' y la imagen de una sección de f la red de X . \square

Veamos algunos ejemplos ilustrativos de casi-isometrías e isometrías a gran distancia.

Ejemplo 2.19. Los espacios \mathbb{Z} y \mathbb{R} con la topología usual son espacios casi-isométricos.

Veamos primero que \mathbb{Z} y \mathbb{R} son casi-isométricos por la definición de Gromov. Si consideramos $A = \mathbb{Z}$ como 0-red de \mathbb{Z} , y $A' = \mathbb{Z}$ como 1-red de \mathbb{R} , claramente son lipschitzianamente equivalentes, de hecho son isométricas (la identidad sería la isometría entre ellas). Luego, siguiendo la definición 2.16, \mathbb{R} y \mathbb{Z} son espacios métricos isométricos a gran distancia. El mismo argumento sirve para probar que \mathbb{Z} y $2\mathbb{Z}$ son isométricos a gran distancia.

Ahora veamos que \mathbb{Z} y \mathbb{R} son casi-isométricos utilizando la definición 2.12, para ello probaremos que la inclusión $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ es una casi-isometría. Tomemos $x, y \in \mathbb{Z}$, y busquemos $C_1 > 0$ y $C_2 \geq 0$ de forma que

$$\frac{1}{C_1} d(x, y) - C_2 \leq d(x, y) \leq C_1 d(x, y) + C_2$$

$$d(x', \mathbb{Z}) \leq C_2$$

para cualquier par $x, y \in \mathbb{Z}$, $x' \in \mathbb{R}$. Basta tomar $C_1 = 1$ y $C_2 = \frac{1}{2}$ y se tiene el resultado. Además, como $C_1 = 1$, los espacios son isométricos a gran distancia y la inclusión es, por tanto, una isometría a gran distancia entre ellos.

Ejemplo 2.20. \mathbb{Z} y $2\mathbb{Z}$ son casi-isométricos.

Para ver esto, probaremos que $f : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ tal que $f(n) = 2n$. Como f es sobreyectiva $d(x', f(x)) = 0$, luego podemos tomar $C_2 = 0$. Ahora bien,

$$d(f(x), f(y)) = d(2x, 2y) = \|2x - 2y\| = 2\|x - y\| = 2d(x, y).$$

Por lo tanto $C_1 = 2$ ya que

$$\frac{1}{2} \leq d(f(x), f(y)) \leq 2d(x, y).$$

De manera que f es una casi-isometría pero no es una isometría a gran distancia.

2.3. Casi-isometría de grafos

Para cualquier grafo, localmente finito o no, el conjunto de vértices (con la métrica inducida) constituye una 1-red de modo que todo grafo es isométrico a gran distancia a su conjunto de vértices. Puesto que la casi-isometría es una propiedad que define una relación de equivalencia, si dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son casi-isométricos, entonces los conjuntos de vértices V y V' con las respectivas métricas inducidas son a su vez casi-isométricos entre sí. Por tanto, dos grafos G y G' son casi-isométricos si y solo si existen $A \subset V$ y $A' \subset V'$ lipschitzianamente equivalentes, esto es, si sus conjuntos de vértices son casi-isométricos (aprovechando la propiedad transitiva). Además, cabe resaltar que la propiedad de ser isométrico a gran distancia también define una relación de equivalencia, luego también se transmite al conjunto de vértices.

Observación 2.21. Es importante señalar que para que la idea geométrica de casi isometría coincida con las definiciones anteriores debemos suponer que el grafo en cuestión es de geometría acotada. De otra forma podríamos encontrarnos, por ejemplo, con una situación en la que cada vértice tenga infinitos bucles que sí podemos apreciar desde el infinito, por lo que la red formada por los vértices no sería igual viéndola desde el infinito que nuestro grafo original y, sin embargo, sí serían casi isométricos según la definición.

Como ya vimos, el grafo de Cayley de un grupo depende del conjunto de generadores considerado. No obstante, cabe esperar que dados dos sistemas de generadores finitos S y S' , los respectivos grafos de Cayley $\mathbb{G}(G, S)$ y $\mathbb{G}(G, S')$ guarden cierta relación entre sí.

Teorema 2.22. *Dados dos grafos de Cayley asociados al mismo grupo pero con distinto conjunto de generadores, es decir, $\mathbb{G} = \mathbb{G}(G, S)$ y $\mathbb{G}' = \mathbb{G}(G, S')$, entonces los espacios (\mathbb{G}, d_S) y $(\mathbb{G}', d_{S'})$ son casi-isométricos.*

Demostración. Podemos tomar como 1-red de ambos espacios $A = A' = G$, sin embargo, no podemos deducir inmediatamente que ambas redes sean isométricas porque estamos considerándolas en espacios con métricas distintas. Denotemos como $n_s = \text{long}_{S'}(s)$, es decir el mínimo número de elementos de $S' \cup S'^{-1}$ necesarios para escribir el generador $s \in S$ como producto de ellos. Respectivamente, definimos $n_{s'} = \text{long}_S(s')$.

Tomemos ahora $c = \max_{s \in S, s' \in S'} \{n_s, n_{s'}\}$, y veamos que la identidad es una aplicación bilipschitziana entre las 1-redes A y A' .

Sean $g, g' \in G$,

$$g' = gs_1 \dots s_t,$$

donde $\text{long}(g^{-1}g') = t$. Pero

$$s_i = s'_{i_1} \dots s'_{i_{n_i}},$$

con $n_i \leq n_s$. Luego tenemos que:

$$g^{-1}g' = s'_{1_1} \dots s'_{1_{n_1}} \dots s'_{t_1} \dots s'_{t_{n_t}} \Rightarrow \text{long}_{S'} \leq t \max_{s \in \{s_1, \dots, s_t\}} \{n_s\} \leq t \max_{s \in S} \{n_s\} \leq tc.$$

De forma que,

$$d_{S'}(g, g') \leq cd_S((g, g')).$$

Por simetría, utilizando un argumento análogo al anterior obtenemos que,

$$d_S(g, g') \leq cd_{S'}((g, g')) \Rightarrow \frac{1}{c}d_S(g, g') \leq d_{S'}((g, g')).$$

Lo que concluye la prueba. □

Capítulo 3

Grafos de Schreier

En este capítulo el punto de partida vuelve a ser, al igual que para los grafos de Cayley, un grupo G (que supondremos finitamente generado para que los grafos asociados sean de geometría acotada) y un conjunto de generadores S . Ahora además añadiremos un subgrupo $H < G$ y trataremos de asociarle un grafo al par formado por el subgrupo y el conjunto de generadores.

3.1. Introducción a los Grafos de Schreier

Dados un grupo G , un conjunto de generadores S de G y H un subgrupo de G , podemos considerar el cociente

$$H \backslash G = \{Hg : g \in G\}$$

por la relación de equivalencia que identifica Hg' con Hg si $g'g^{-1} \in H \Leftrightarrow g' \in Hg$. Además, dotaremos a este espacio, $H \backslash G$, de una estructura de grafo igual que hacíamos al considerar $\mathbb{G}(G, S)$.

Definición 3.1. Sea G un grupo dotado de un conjunto de generadores $S = \{s_i\}_{i \in I}$ y $H < G$ un subgrupo. El *grafo de Schreier* de H construido con respecto de S es el grafo Γ cuyos vértices son los elementos de $H \backslash G$ y en el que dos vértices Hg y Hg' están conectados por una arista $S_i \in S$ (una vez más identificaremos las aristas con los generadores) si y solo si $Hgs_i = Hg'$. Se dice entonces que la arista va de Hg a Hg' .

Observación 3.2. Nótese que no le estamos pidiendo a H normalidad, es decir, $H \backslash G$ no es, en general, un grupo. Además, cabe señalar que si H es un subgrupo normal de G entonces el grafo de Schreier de H coincide con el grafo de Cayley salvo la eliminación de los posibles bucles que se formen al unir dos vértices identificados debido a que el conjunto de generadores es de G , no de $H \backslash G$.

Después de la anterior observación, es claro que los grafos de Schreier son una generalización de los grafos de Cayley (bastaría tomar como subgrupo el neutro y ya tendríamos un grafo de Cayley). Sin embargo, la geometría en los grafos de Schreier es mucho más complicada. En adelante Γ denotará el grafo de Schreier de un subgrupo $H < G$ respecto de un conjunto de generadores S de G asociado. También identificaremos abusivamente las aristas con los elementos de $s_i \in S$ que las etiquetan.

Proposición 3.3. *Los grafos de Schreier son conexos y fuertemente conexos si el conjunto de generadores considerado es simétrico.*

Demostración. Esto se deduce del hecho de que la acción natural por la derecha $\phi : H \backslash G \curvearrowright G$ es transitiva, es decir, que dados $x, y \in H \backslash G$, existe $g \in G$ tal que $y = \phi(x, g)$. En efecto, dados $Hg, Hg' \in H \backslash G$, como $g^{-1}g' \in G$ entonces $\phi(Hg, g^{-1}g') = Hg'$. Por lo tanto, dados $Hg, Hg' \in H \backslash G$, si $g^{-1}g' = s_1 \dots s_n \in S \cup S^{-1}$, entonces el conjunto de vértices $\{Hg, Hgs_1, Hgs_1s_2, \dots, Hgs_1 \dots s_{n-1}, Hg'\}$ determina un camino entre Hg y Hg' . Cabe señalar que no nos importa si s_k pertenece a S o a S^{-1} porque, aunque la arista s_k no esté en S , sí tiene que estarlo entonces forzosamente s_k^{-1} y sus extremos son los mismos que los de s_k . Concluimos entonces que no nos afecta a la hora de determinar el camino. Sin embargo, en general, no podemos garantizar la existencia de un camino cuyas aristas apunten siempre de un vértice al siguiente, es decir, un camino orientado, lo cual es equivalente a encontrar para cada par de vértices Hg, Hg' un conjunto de aristas $\{s_1, \dots, s_n\} \subset S$ de forma que $Hg' = Hgs_1 \dots s_n$ y para conseguir esto necesitamos que S sea simétrico. \square

Observación 3.4.

- (i) Al igual que los grafos de Cayley tenían una estructura natural de grafo enraizado considerando como raíz el neutro $1 \in G$, en los grafos de Schreier ocurre lo mismo sin más que considerar como raíz la clase del neutro, es decir, $H \in H \backslash G$.
- (ii) Los grafos de Schreier son regulares (de acuerdo con la definición 1.5). Esto se deduce del hecho de que para cada vértice $x = Hg \in \Gamma$ y cada arista $s \in S$ existen exactamente dos aristas, una entrante y otra saliente etiquetadas por s incidentes en x (nótese que un bucle cuenta como dos aristas pues hay que considerar las dos orientaciones). Se tiene por tanto que la valencia de los vértices en un grafo de Schreier es siempre par y concretamente $2\#S$ con las mismas salvedades que en los grafos de Cayley.
- (iii) Sabemos que los grafos de Cayley no tienen bucles. Sin embargo el número de bucles en un grafo de Schreier es exactamente $n^0(\text{bucles}) = \#\{s \in S : Hs = H\}$.

- (IV) También podríamos haber definido los grafos de Schreier como un cociente por la derecha considerando la acción por la izquierda. Si denotamos $G \curvearrowright X$ una acción transitiva de G sobre un espacio X y denotamos por $G.x = \{gx : g \in G\}$ la órbita del punto $x \in X$, entonces $G.x$ es homeomorfa a cociente G/G_x de G por la isotropía $G_x = \{g \in G : g.x = x\}$. La órbita puede dotarse de una estructura de grafo de Schreier sin más que unir dos puntos $y, z \in G.x$ mediante una arista etiquetada por $s \in S$ si y solo si $z = s.y$ (siendo S conjunto de generadores de G). Del mismo modo que antes, la raíz en este grafo sería la órbita de x . No obstante, como los generadores actúan por la derecha, en la definición 3.1, estamos dotando de una estructura de grafo de Schreier a la órbita de H que es precisamente el cociente $H \backslash G$ de G por la isotropía de la acción por la derecha, $H \backslash G \curvearrowright G$.

3.2. Estructuras de Schreier

A la elección de las "etiquetas" de las aristas del grafo de Schreier dentro de los generadores de un grupo le llamaremos *estructura de Schreier*. La definición formal será introducida más adelante pero la idea es partir de un vértice $x \in \Gamma$ (recordemos que con esta notación nos referimos realmente a $x \in V(\Gamma)$), por ejemplo la raíz, e ir coloreando las aristas que tienen la misma etiqueta con el mismo color en todas las direcciones posibles. Siguiendo este proceso, llegaremos necesariamente a obtener un ciclo (quizá infinito como ocurre en el grafo de Cayley de la figura 2.1). Por inducción en el número de generadores, estos ciclos descomponen totalmente a Γ .

Observación 3.5. Esta forma de etiquetar las aristas del grafo nos da una idea de cómo actúa el grupo G sobre el grafo Γ . Una forma de pensar esto es la siguiente: si tomamos un $g \in G$, que, como sabemos, podemos presentar como una palabra del alfabeto $S \cup S^{-1}$, donde S es el conjunto de generadores de G subyacente al grafo de Schreier Γ , entonces, de forma natural, este elemento g transforma el grafo Γ cambiando su punto raíz, es decir, desplazando la raíz original (la órbita del neutro en el cociente) al final del camino trazado al movernos en la dirección de las aristas correspondientes a la presentación de g desde el vértice raíz hasta el punto $g \in G$. El resultado de este desplazamiento de raíz es el grafo de Schreier del subgrupo conjugado gHg^{-1} .

Veamos el porqué de esto. Si Γ es el grafo de Schreier asociado a un subgrupo $H < G$ con respecto a un conjunto de generadores S (es decir, $\Gamma = H \backslash \mathbb{G}$, donde $\mathbb{G} = \mathbb{G}(G, A)$, es decir, es el grafo de Cayley de G respecto del conjunto de generadores S) entonces el subgrupo de *isotropía* $\text{Iso}(\Gamma, H) = \{g \in G : H.g = H\} = H$ y se tiene que $\text{Iso}(\Gamma, H) \backslash \mathbb{G} = \Gamma$.

Obsérvese que estamos haciendo actuar los elementos de G sobre $H \backslash G$ por la derecha, es decir, la acción $\phi : H \backslash G \times G \longrightarrow H \backslash G$ lleva un par (Hg, g') en $Hgg' \in H \backslash G$. Basta entonces comprobar que, en efecto, $\text{Iso}(\Gamma, Hg) = g^{-1}Hg$. Sea $g' \in \text{Iso}(\Gamma, Hg)$, es decir, g es tal que

$$Hgg' = Hg \Leftrightarrow gg' \in Hg \Leftrightarrow g' \in g^{-1}Hg.$$

En general, si $X \curvearrowright G$ es una acción transitiva y fijamos dos puntos $x, y \in X$, entonces las estructuras de Schreier definidas sobre las órbitas $x.G$ e $y.G$ serán idénticas salvo la posición de sus raíces. Sabemos que los grupos de isotropía G_x y G_y son conjugados.

Definición 3.6. Fijado $n \in \mathbb{N}$, sea Λ el espacio de grafos de Schreier del grupo libre \mathbb{F}_n , dotado de un sistema de generadores S con n elementos, Ω el conjunto de los grafos $2n$ -regulares enraizados (esta última condición no es estrictamente necesaria pues siempre podemos designar una raíz arbitrariamente). Dado un grafo $\Gamma \in \Omega$, una *estructura de Schreier* Σ sobre Γ es un etiquetado de sus aristas por los generadores del grupo libre \mathbb{F}_n que convierte a Γ en un grafo de Schreier, es decir, una aplicación $\Sigma : E_0(\Gamma) \longrightarrow S$ donde $E_0(\Gamma)$ es un subconjunto de $E(\Gamma)$ tal que $E_0(\Gamma) \cup E_0(\Gamma)^{-1} = E(\Gamma)$ y $E_0(\Gamma) \cap E_0(\Gamma)^{-1}$ sean únicamente los bucles.

Observación 3.7. Nótese que cuando decimos que dotamos a un grafo $2n$ -regular de una estructura de Schreier estamos suponiendo que el grafo es no orientado y cuando escogemos el conjunto $E_0(\Gamma) \subset E(\Gamma)$ estamos orientando cada arista de Γ de modo que si un vértice admite una arista entrante etiquetada por s , entonces hay otra saliente con la misma etiqueta s . Esto lo hacemos para respetar la propiedad de regularidad entrante y saliente de los grafos de Schreier tomando un conjunto de generadores en las condiciones de la observación 2.3.

La proyección canónica $p : G \longrightarrow H \backslash G$ que envía cada elemento $g \in G$ en la clase $Hg \in H \backslash G$ se extiende en una proyección recubridora $p : \mathbb{G} \longrightarrow \Gamma$, del grafo de Cayley $\mathbb{G} = \mathbb{G}(G, S)$ sobre el grafo de Schreier $\Gamma = H \backslash \mathbb{G}$. En efecto, como la acción por la izquierda de G sobre el grafo de Cayley \mathbb{G} es libre y propiamente discontinua en virtud de la proposición 2.8, la acción de H también lo es y, por consiguiente $p : \mathbb{G} \rightarrow \Gamma$ es una cubierta regular de grupo H que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G} & & \\ \downarrow G & \searrow H & \\ G \backslash \mathbb{G} & \xleftarrow{G \backslash H} & H \backslash \mathbb{G} \end{array}$$

Sea $L(G)$ el conjunto de los subgrupos de G y $\Lambda(G)$ el espacio de grafos de Schreier de G . Ambos están dotados de una estructura de retículo, i.e, conjunto ordenado donde cada par de elementos posee un único supremo y un único ínfimo: el conjunto $L(G)$ es un retículo dotado del orden por inclusión, mientras que $\Lambda(G)$ es un retículo dotado del orden $\Gamma \leq \Gamma'$ si hay una proyección recubridora $r : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ que envía la raíz de Γ en la de Γ' . De hecho, la aplicación $f : L(G) \rightarrow \Lambda(G)$ que lleva cada subgrupo $H < G$ en el correspondiente grafo de Schreier $\Gamma = H \backslash G$ (entendemos fijado un conjunto de generadores) es un isomorfismo reticular que envía cada par $H \leq H'$ en el correspondiente $\Gamma \leq \Gamma'$ donde $r : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ es una proyección recubridora que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ \downarrow q & \searrow p & \\ H' & & H \backslash G \\ \downarrow & \xleftarrow[r]{G \backslash H} & \\ H' \backslash G & & \end{array}$$

De esta forma podemos reinterpretar lo que dice la observación 3.5 de la siguiente manera: el desplazamiento del punto base $1 \in G$ a $g \in G$ se traduce en cambiar el subgrupo H por el subgrupo conjugado $g^{-1}Hg$, pero ambos subgrupos están en la misma clase de conjugación y determinan la misma cubierta de $G \backslash G = \bigvee_{i=1}^n S^1 \times \{i\}$ salvo el automorfismo de cubiertas que envía H en Hg .

La inversa del isomorfismo, $f^{-1} : \Lambda(G) \rightarrow L(G)$ se puede pensar de la siguiente manera: si Γ es un grafo de Schreier correspondiente a G , entonces el subgrupo H asociado a Γ es el estabilizador G_x de la raíz de G .

Gracias a la observación anterior sabemos que la cubierta universal de cualquier grafo de Schreier Γ es grafo de Cayley del grupo libre \mathbb{F}_S . De hecho, cualquier grafo de Schreier de un grupo G con un conjunto de generadores dado S es también grafo de Schreier del grupo libre \mathbb{F}_S . Esta descripción es interesante, ya que los grafos de Cayley de los grupos libres son siempre árboles y por tanto simplemente conexos (ya que son contráctiles) y esto nos permite obtener una formulación homotópica del subgrupo H por el que cocientamos. En efecto, el diagrama de cubiertas 3.2 se completa con el diagrama de cubiertas universales 3.1.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_S & & \\ \downarrow \pi_1(H \backslash G) & \searrow \pi_1(G) & \\ H \backslash G & \xleftarrow[H]{G} & G \end{array} \quad (3.1)$$

La cubierta p induce un monomorfismo,

$$p_* : \pi_1(\mathbb{G}) \longrightarrow \pi_1(H \setminus \mathbb{G})$$

que a su vez induce un isomorfismo:

$$\pi_1(H \setminus \mathbb{G}) / \pi_1(\mathbb{G}) \cong H$$

ya que la cubierta p es regular y H es isomorfo al grupo de automorfismos de ésta. Para ver los resultados de cubiertas utilizados en esta sección se puede consultar [1].

3.3. Teorema de Petersen-Gross

Al componer el isomorfismo reticular $f : L(G) \longrightarrow \Lambda(G)$ con la aplicación de olvido, $o : \Lambda \longrightarrow \Omega$, que lleva cada grafo de Schreier al grafo no orientado subyacente, se obtiene una aplicación natural $F : L(G) \longrightarrow \Omega(G)$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} L(G) & & \\ \downarrow f & \searrow F & \\ \Lambda(G) & \xrightarrow{o} & \Omega(G) \end{array}$$

Ahora cabe preguntarse si cualquier grafo enraizado $2n$ -regular admite una estructura de Schreier, es decir, si la aplicación de "olvido" es sobreyectiva. La respuesta se debe a J.Gross [19] y se basa en un teorema de Petersen sobre 2-factorización.

Definición 3.8. Un *2-factor* de un grafo Γ es un subgrafo recubridor 2-regular. Nótese que dicho subgrafo no tiene por qué ser conexo aunque lo sea Γ ; de hecho, si lo fuese, sería además un ciclo Hamiltoniano (finito o infinito).

Un grafo se dice *2-factorizable* si se puede descomponer en 2-factores cuyas aristas son mutuamente disjuntas (no repetimos aristas). Esta descomposición no es necesariamente única.

Proposición 3.9. *Un grafo admite una estructura de Schreier si y solo si es 2-factorizable.*

Demostración. Si Γ es un grafo de Schreier (suponiendo $S = \{s_i\}_{i=1}^n$ el conjunto de generadores asociado), entonces el subgrafo generador Γ_i formado por todos los vértices de Γ y todas las aristas etiquetadas por $s_i \in S$ es un 2-factor. Además, las aristas de cada Γ_i son disjuntas a las de Γ_j si $i \neq j$. Así, como todas las aristas del grafo están etiquetadas por algún s_i , tenemos que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$ es una 2-factorización de Γ .

Recíprocamente, si $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$ es una 2-factorización de Γ , solo necesitamos darle una orientación adecuada (como en la definición 3.6) a las componentes de cada Γ_i y etiquetar las aristas de Γ_i con el generador s_i para obtener un etiquetado de Γ . \square

Definición 3.10. Un grafo G se dice *bipartito* si existen dos subconjuntos disjuntos de vértices $V_1 \subset V(G)$ y $V_2 \subset V(G)$ de tal manera que $V_1 \cup V_2 = V(G)$ y las aristas del grafo solo conectan vértices de V_1 con vértices de V_2 (y viceversa si consideramos orientaciones). Esto se traduce en la siguiente condición,

$$\forall u_1, u_2 \in V_1, \forall v_1, v_2 \in V_2 : (u_1, u_2), (v_1, v_2) \notin E(G).$$

Esta separación no tiene que ser única, pero si existe una separación de este tipo de forma que los vértices de cada lado tengan todos la misma valencia, decimos entonces que se trata de un grafo *birregular*.

Proposición 3.11. *Un grafo es bipartito si y solo si todos sus ciclos son pares.*

Demostración. Consultar [21, p.18]. \square

Definición 3.12. Un *emparejamiento* en un grafo G es un conjunto de aristas disjuntas (sin vértices en común). Un *emparejamiento completo* (o máximo) en un grafo bipartito $G = (V_1|V_2)$ de V_1 a V_2 es un conjunto de aristas disjuntas que además cumple que para cada $u_i \in V_1$ existe $v_i \in V_2$ tal que (u_i, v_i) o (v_i, u_i) están en $E(G)$ y $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$. Esto es, cada vértice de V_1 tiene un representante en V_2 distinto al que está unido por medio de una arista.

Observación 3.13. La existencia de un emparejamiento completo de V_1 a V_2 no implica que exista un emparejamiento completo de V_2 a V_1 , pues puede ocurrir, por ejemplo, que V_2 tenga más elementos que V_1 y se de una situación como la de la figura 3.1.

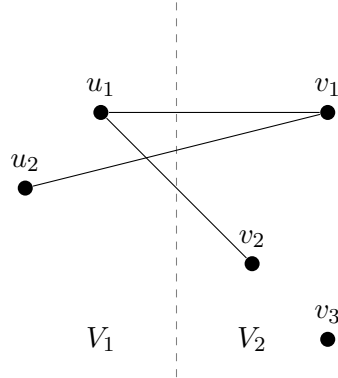


Figura 3.1: Puede encontrarse un emparejamiento de V_1 a V_2 pero no al revés porque, por una cuestión de cardinalidad, habría dos vértices del lado derecho con la misma imagen en el lado izquierdo

Teorema 3.14 (Teorema del matrimonio de Hall). *Un grafo bipartito $G = (V_1 | V_2)$ contiene un emparejamiento completo de V_1 a V_2 si y sólo si:*

$$\#\Gamma(S) \geq \#S, \forall S \subset V_1.$$

Es decir, si para cada subconjunto de vértices de V_1 el número de vértices adyacentes a los vértices de éste es siempre mayor o igual al número de vértices.

Demostración. Consultar [6, p.77] o, para una prueba alternativa [9, p.36]. \square

Teorema 3.15 (Teorema de Petersen). *Todo grafo finito $2n$ -regular es 2-factorizable.*

Demostración. La idea de esta demostración es que la siguiente: por el teorema de Euler, grafo finito tiene un *camino Euleriano*, i.e, camino que pasa una vez por cada arista, si y solo si cada uno de sus vértices es de grado par, por lo que se puede dividir cualquier grafo finito $2n$ -regular en cierto grafo bipartito y aplicar entonces el teorema 3.14 para extraer un 2-factor. Ahora, por inducción obtendríamos la 2-factorización. La demostración se puede encontrar en detalle en el capítulo 2.1 de [9, p39]. \square

Corolario 3.16. *Todo grafo finito $2n$ -regular admite una estructura de Schreier.*

Demostración. Inmediato a partir del teorema anterior y de la proposición 3.9. \square

El siguiente lema nos da una condición suficiente de cuándo un grafo infinito tiene un camino infinito (rayo geodésico).

Lema 3.17 (Lema del infinito de König). *Si G es un grafo conexo, localmente finito e infinito, entonces G contiene un rayo geodésico.*

Recordemos que para dotar a un grafo de una estructura de Schreier necesitamos una elección adecuada de las orientaciones, como en la definición 3.6.

Teorema 3.18 (Teorema de Petersen-Gross). *Todo grafo $2n$ -regular admite estructura de Schreier.*

Demostración. Como ya hemos probado el caso finito en el corolario 3.16, consideremos un grafo $2n$ -regular infinito Γ . Podemos suponer Γ conexo sin pérdida de generalidad (si no sería cuestión de restringirnos a una componente conexa). Escogemos una raíz $x_0 \in \Gamma$, de forma que ya tenemos un grafo enraizado.

Consideremos la bola de centro x_0 y radio r ,

$$B_r = \{x \in \Gamma : d(x_0, x) \leq r\}.$$

Se llama *borde (exterior) de B_r* al conjunto ∂B_r formado por las aristas del Γ que conectan los vértices de B_r con los vértices que no están en B_r , que de hecho coincide con el conjunto de aristas de $B_{r+1} \setminus B_r$. Su cardinal es siempre par. En efecto, observamos primero que:

$$\sum_{x \in U_r} \text{val}(x) = 2\#E(U_r) + \#\partial B_r.$$

Como el grafo es $2n$ -regular, entonces $\sum_{x \in B_r} \text{val}(x) = 2n\#B_r$ despejando deducimos que:

$$\#\partial B_r = 2(n\#B_r - \#E(B_r))$$

es par. Consideremos entonces el grafo $B_r \cup \partial B_r$, completando con los vértices necesarios para que las aristas del borde tengan siempre origen y extremo, que de hecho coincide con B_{r+1} . Ahora agrupamos por pares los elementos de C y vamos eliminando cada par de $U_r \cup C$ al mismo tiempo que conectamos los puntos de U_r que eran adyacentes a las aristas del par que hemos eliminado (aunque ya lo estuviesen) añadiendo para ello una nueva arista. Es importante en este paso hacer una consideración: si el grafo lo hemos supuesto sin orientar y somos nosotros los que le damos la orientación al dotar a éste de una estructura de Schreier no tenemos problema a la hora de tomar las parejas de vértices, sin embargo, si suponemos el grafo orientado (siempre con una orientación adecuada como se menciona en la definición 3.6) entonces debemos tomar como pareja de aristas una

saliente y una entrante a los vértices de U_r , como se observa en las figuras 3.2 y 3.3, ya que en otro caso podríamos alterar el equilibrio entre la valencia entrante y saliente de los vértices. Sabemos que podemos hacer esta elección de las aristas gracias a que $val_e = val_s$. Cabe señalar también que si un par de aristas fuese únicamente incidente en un vértice del conjunto habría que introducir entonces un bucle, que cuenta como una arista entrante y otra saliente. Una vez terminado este proceso lo que conseguimos es un grafo $2n$ -regular finito que, por el corolario 3.16 admite estructura de Schreier. Llamemos Σ_r al conjunto de estructuras de Schreier de B_r que, por lo anterior, es no vacío (y de hecho finito por una cuestión simple de combinatoria). Construyamos ahora un grafo Σ cuyos vértices son los elementos de Σ_r y donde conectamos cada vértice de Σ_{r+1} con el vértice de Σ_r que representa la estructura de Schreier de sobre B_r inducida sobre B_{r+1} . Por construcción, Σ es un árbol infinito que admite un rayo geodésico, en virtud del lema 3.17. Luego existe una sucesión de estructuras de Schreier definidas sobre las bolas B_r de modo que cada una es extensión de los anteriores. Luego $\Gamma = \bigcup_{r \geq 1} B_r$ admite una estructura de Schreier. \square

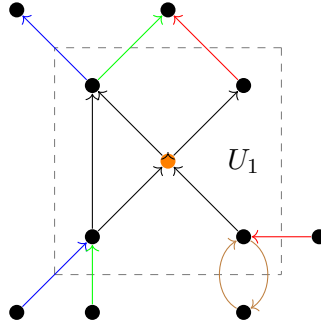


Figura 3.2: En esta imagen se muestra en naranja la raíz escogida. La elección de los pares de aristas que eliminaremos está representada como aristas del mismo color.

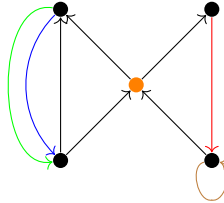


Figura 3.3: En esta imagen tenemos ya el grafo $2n$ -regular resultante de la eliminación anterior. Se han representado las aristas añadidas con el color del par eliminado del que corresponden.

Capítulo 4

Espacios de grafos y grafos aleatorios

4.1. Relaciones de equivalencia borelianas, medibles y étales

Primero recordaremos algunas definiciones y generalidades básicas de teoría de la medida y teoría ergódica basándonos en [36] y [5].

Definición 4.1. Una σ -álgebra sobre un conjunto X es una colección \mathcal{B} de subconjuntos de X , que cumple las siguientes propiedades:

(I) \emptyset y $X \in \mathcal{B}$.

(II) La unión de una familia numerable de elementos de \mathcal{B} pertenece a \mathcal{B} .

(III) El complementario de un elemento de \mathcal{B} pertenece a \mathcal{B} .

Al par (X, \mathcal{B}) se le llama *espacio medible*. Una aplicación

$$f : (X_1, \mathcal{B}_1) \longrightarrow (X_2, \mathcal{B}_2)$$

entre dos espacios medibles se dice *medible* si $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_1$, $\forall B \in \mathcal{B}_2$. Un *isomorfismo medible* es una aplicación biyectiva medible cuya inversa también es medible. Si además es un endomorfismo (va de un espacio en sí mismo) decimos que es un automorfismo medible. Dos espacios medibles se dicen *isomorfos* si existe un isomorfismo medible entre ellos.

Definición 4.2. Dados dos espacios medibles (X, \mathcal{A}) e (Y, \mathcal{B}) , se denomina σ -álgebra *producto* a la menor σ -álgebra de $X \times Y$ que hace medibles las proyecciones $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ y $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$.

Definición 4.3. Una medida es una función $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ definida sobre un espacio medible (X, \mathcal{B}) que cumple las siguientes propiedades:

- (I) $\mu(\emptyset) = 0$.
- (II) Para cada familia numerable $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ de conjuntos medibles disjuntos, se cumple que $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_n)$.

A la terna (X, \mathcal{B}, μ) la llamamos *espacio de medida*. Normalmente, si \mathcal{B} es conocido, lo notaremos simplemente por (X, μ) . Si además μ cumple que $\mu(X) = 1$, se dice que μ es una *medida de probabilidad* y que (X, μ) es un *espacio de probabilidad*.

Definición 4.4. Dado (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida, $((Y, \mathcal{B}))$ un espacio medible y $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ una aplicación medible, se define la *medida imagen* $f_*(\mu)$ en (Y, \mathcal{B}) dada por

$$f_*(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B)),$$

para todo $B \in \mathcal{B}$.

Definición 4.5. Dado un espacio topológico X , se define la *σ -álgebra de Borel* como la σ -álgebra $\mathcal{B}(X)$ generada por los conjuntos abiertos. A los conjuntos de $\mathcal{B}(X)$ se les llama *borelianos*. Un espacio medible isomorfo al espacio medible formado por un espacio topológico dotado de la σ -álgebra de Borel se llama *espacio de Borel*. A una aplicación entre espacios de Borel se la denomina *aplicación boreliana*. Un *espacio polaco* es un espacio topológico homeomorfo a un espacio métrico, completo y separable. Un *espacio boreliano estándar* es un espacio medible isomorfo a un espacio polaco dotado de la σ -álgebra de Borel.

Teorema 4.6 ([34], Theorem 3.3.13). *Todo espacio boreliano estándar no numerable es isomorfo al intervalo $[0, 1]$.*

Corolario 4.7 ([34], Theorem 3.3.16). *Dos espacios borelianos estándar son isomorfos si y solo si tienen el mismo cardinal.*

Podemos afirmar entonces que todo espacio boreliano estándar es infinito es isomorfo a \mathbb{N} o a $[0, 1]$.

Teorema 4.8 ([25]). *Sea X un espacio boreliano estándar y B un espacio polaco. Sea $p_1 : X \times B \rightarrow X$ la proyección sobre el primer factor. Si A es un boreliano de $X \times B$ y los conjuntos $A_x = \{y \in B : (x, y) \in A\}$, $x \in X$, son uniones numerables de conjuntos compactos de B , entonces $p_1(A)$ es un boreliano de X . Además, existe una sección boreliana $s : p_1(A) \rightarrow A$ de p_1 .*

Teorema 4.9. Sean X e Y dos espacios de Borel estándar y sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación boreliana de fibras numerables. Entonces la imagen de la aplicación f , $f(X)$ es un boreliano de Y y existe una sección boreliana $s : f(X) \rightarrow X$ de f . En particular, si f es inyectiva, concluimos además que es un isomorfismo boreliano entre X e Y .

Demostración. El grafo $G(f) = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = y\}$ es un boreliano de $X \times Y$ (para esta demostración consultar [20, p.143]). Como X es isomorfo a un espacio polaco (por lo visto anteriormente $[0, 1]$ o \mathbb{N}), podemos aplicar el lema 4.6 a la proyección $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$. Si las fibras son finitas, una idea más directa sería considerar para cada $y \in f(X)$, el primer elemento de $f^{-1}(y)$ (con el orden de $[0, 1]$ o \mathbb{N} según corresponda) para cada $y \in f(X)$. De esta forma tendríamos construida la sección $s : f(X) \rightarrow X$ de forma que $f \circ s = id_X$. \square

Definición 4.10. Una medida de Borel μ es una medida definida sobre la σ -álgebra de Borel de un espacio polaco X . Un *espacio de probabilidad estándar* es un espacio boreliano estándar dotado de una medida de probabilidad. En este caso a los conjuntos medibles se les llama *sucesos*.

Teorema 4.11. Todo espacio de probabilidad estándar sin átomos es isomorfo al intervalo $[0, 1]$ dotado de la medida de Lebesgue.

Definición 4.12. Una relación de equivalencia \mathcal{R} sobre un espacio medible (respectivamente boreliano) se dice medible (respectivamente boreliana) si $\mathcal{R} = \{(x, y) \in X \times X : x \mathcal{R} y\}$ es un subconjunto medible (respectivamente boreliano) de $X \times X$. Una relación se denomina *discreta* si las clases $\mathcal{R}[x]$ son numerables.

Definición 4.13. Decimos que una acción $\phi : G \curvearrowright X$ es *boreliana* si para cada $g \in G$, la traslación

$$L_g : X \longrightarrow X$$

que lleva cada $x \in X$ en $L_g(x) = g.x$, es un isomorfismo boreliano.

Decimos que la acción de un grupo de automorfismos borelianos de un espacio de probabilidad estándar es *esencialmente libre* si el boreliano formado por todos los puntos $x \in X$ con estabilizador no trivial ($G_x = \{g \in G : g.x = x\} \neq 1$) es de medida nula.

Ejemplo 4.14. Si G es un grupo numerable y $\phi : G \curvearrowright X$ es una acción boreliana, entonces la imagen $\mathcal{R}_G = \{(x, g.x) \in X \times X : x \in X, g \in G\}$ de la aplicación boreliana

$$\begin{aligned} \delta : G \times X &\longrightarrow X \times X \\ (g, x) &\longmapsto (x, g.x) \end{aligned}$$

define una relación de equivalencia boreliana discreta.

Ejemplo 4.15. Un automorfismo boreliano $f : X \rightarrow X$ define una acción mediante boreliana de \mathbb{Z} sobre X . La relación orbital se denotará por \mathcal{R}_f y diremos que $x\mathcal{R}_fy$ si existe un $n \in \mathbb{Z}$ de forma que $f^n(x) = y$. luego \mathcal{R}_f es la unión de los grafos de los automorfismos f^n y por consiguiente es un boreliano.

Observación 4.16. Si la aplicación $f : X \rightarrow X$ es simplemente un endomorfismo, también define una relación de equivalencia boreliana R_f que relaciona dos elementos $x, y \in X$ si existen $n, m \in \mathbb{N}$ de manera que $f^n(x) = f^m(y)$.

El siguiente resultado debido a J. Feldman y C. C. Moore nos facilita en gran medida el estudio de las relaciones borelianas discretas.

Teorema 4.17 ([11], Theorem 1). *Toda relación de equivalencia boreliana discreta definida sobre un espacio boreliano estándar X está definida por la acción boreliana de un grupo numerable.*

Definición 4.18. Se denomina *transformación parcial* de una relación medible (respectivamente boreliana) a un isomorfismo medible (respectivamente boreliano) $\phi : A \rightarrow B$ de \mathcal{R} entre subconjuntos medibles (respectivamente borelianos) A y B de X cuyo grafo está contenido en \mathcal{R} .

Definición 4.19. Una medida μ se dice *\mathcal{R} -invariante* si verifica que $\phi_*(\mu|_A) = \mu|_B$ para cualquier transformación parcial $\phi : A \rightarrow B$ de \mathcal{R} donde $\mu|_A$ y $\mu|_B$ son las medidas restringidas a A y B respectivamente. Cuando las transformaciones parciales conservan únicamente los conjuntos de medida nula, decimos que μ es *\mathcal{R} -casi-invariante no singular*.

De modo equivalente, recordando que la \mathcal{R} -saturación de A es la unión de las imágenes de A por las transformaciones parciales de \mathcal{R} definidas sobre A , se tiene que $\mu(A) = 0$ implica $\mu(\mathcal{R}(A)) = 0$.

Ejemplo 4.20. Si $f : X \rightarrow X$ es un isomorfismo boreliano y \mathcal{R}_f la relación de equivalencia orbital asociada, entonces una medida μ definida en el espacio X es \mathcal{R}_f -invariante (respectivamente \mathcal{R}_f -casi-invariante) si y solo si es f -invariante (respectivamente f -casi-invariante).

Las definiciones que acabamos de ver pueden enunciarse también para acciones de grupos numerables.

Definición 4.21. Una medida μ en X se dice *G -invariante* si para cualquier $g \in G$ se verifica que $g_*(\mu) = \mu$. Si las transformaciones parciales solo conservan conjuntos de medida nula, entonces decimos que μ es *G -casi-invariante*.

Definición 4.22. Una medida μ se dice \mathcal{R} -ergódica si para cada boreliano $A \subset X$ o bien $\mu(\mathcal{R}[A]) = 0$ o bien $\mu(\mathcal{R}[A]) = 1$.

Si X está dotado de una topología \mathcal{T} podemos introducir los siguientes conceptos:

Definición 4.23. Un subconjunto cerrado Z de X se denomina \mathcal{R} -minimal si verifica una de las dos siguientes condiciones equivalentes:

- (I) Z es un cerrado \mathcal{R} -invariante o \mathcal{R} -saturado minimal por inclusión,
- (II) $\overline{\mathcal{R}[z]} = Z$, para todo $z \in Z$.

Definición 4.24. El *soporte* de una medida μ es el conjunto

$$\text{sup}(\mu) = \{x \in X : \mu(U_x) > 0, \forall U_x \subset X, \text{ entorno de } x\}.$$

Obsérvese que es cerrado pues su complementario es la unión de todos los abiertos de medida nula.

Observación 4.25. En [36] se construyen ejemplos que demuestran que el soporte de una medida μ no tiene por qué ser \mathcal{R} -invariante aunque la medida μ sea (casi-)invariante y ergódica.

Definición 4.26 ([15]). Sea X un espacio topológico y $\mathcal{R} \subset X \times X$ una relación de equivalencia sobre X dotada de una topología \mathcal{T} . Sean $p_1, p_2 : \mathcal{R} \rightarrow X$ las proyecciones sobre el primer y el segundo factor respectivamente. Decimos que la relación de equivalencia \mathcal{R} es *étale* si verifica:

- (I) las aplicaciones $p_1, p_2 : \mathcal{R} \rightarrow X$ son homeomorfismos locales.
- (II) si U y V son abiertos de \mathcal{R} , entonces el conjunto $UV = \{(x, z) : (x, y) \in U, (y, z) \in V, \text{ para algún } y \in X\}$ es también abierto.
- (III) si $U \subset \mathcal{R}$ es abierto, entonces lo es también $U^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in U\}$.

Observación 4.27. En general la topología \mathcal{T} para la que $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ es étale no coincide con la topología producto de $X \times X$. La diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es un abierto de \mathcal{R} puesto que $\Delta = \bigcup_{U \in \mathcal{T}} UU^{-1}$. Además, las proyecciones restringidas a la diagonal $p_1|_{\Delta}$ y $p_2|_{\Delta}$ son homeomorfismos que identifican Δ con X . También podemos afirmar que las propiedades locales de las topologías de \mathcal{R} y X son las mismas pues p_1 y p_2 son homeomorfismos locales.

Proposición 4.28. *Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico T_1 (respectivamente T_2) y $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ una relación de equivalencia étale sobre X . Entonces $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ es un espacio T_1 (respectivamente T_2).*

Demostración. Sean (x, y) dos puntos diferentes de \mathcal{R} . Si $x \neq x'$, por ser X un espacio T_1 , hay dos entornos que separan x y x' que, mediante imagen recíproca de p_1 , separan (x, y) y (x', y') . Si $x = x'$ entonces $y \neq y'$ y procederíamos de manera análoga con la proyección p_2 en lugar de p_1 . Por tanto, concluimos que \mathcal{R} es T_1 . La misma demostración prueba que si X es Hausdorff, también lo es \mathcal{R} . \square

Proposición 4.29. *Sea $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ una relación de equivalencia étale sobre X . Las fibras de las proyecciones p_1 y p_2 son discretas con la topología inducida.*

Demostración. Se deduce directamente del hecho de que las proyecciones p_1 y p_2 son homeomorfismos locales. \square

Del mismo modo que ocurría en las relaciones borelianas, podemos formular los conceptos de invarianza y casi-invarianza de medidas a partir de transformaciones locales.

Definición 4.30. Sea X un espacio topológico. Se llama *pseudogruppo* (de transformaciones locales en X) a una familia Γ de homeomorfismos $f : U \rightarrow V$ entre abiertos U y V de X que verifican las siguientes propiedades:

- (I) Si $f \in \Gamma$ y $W \subset \text{Dom}(f)$, entonces $f|_W \in \Gamma$.
- (II) $\text{id}_X \in \Gamma$.
- (III) Si $f, g \in \Gamma$ verifican $\text{Im}(f) = \text{Dom}(g)$, entonces $g \circ f \in \Gamma$.
- (IV) Si $f \in \Gamma$, entonces $f^{-1} \in \Gamma$.
- (V) Sea $f : U \rightarrow V$ un homeomorfismo. Si para cada $x \in U$ existe un entorno abierto $U_x \subset U$ de x de tal manera que $f|_{U_x} \in \Gamma$, entonces $f \in \Gamma$.

Se dice que una familia de homeomorfismos $\{h_i\}$ genera un pseudogruppo Γ si este es el menor pseudogruppo que contiene a $\{h_i\}$, es decir, si los elementos de Γ se obtienen como resultado de restringir, componer, invertir y unir homeomorfismos de la familia $\{h_i\}$ e identidades. Decimos que un pseudogruppo es de *generación numerable* (respectivamente *finitamente generado*) si existe una familia numerable (respectivamente finita) que lo genere.

Definición 4.31. Sea Γ un pseudogrupo de transformaciones locales de un espacio topológico X . Decimos que una medida de Borel μ sobre X es Γ -invariante si $\mu(h(B)) = \mu(B)$ para todo $h \in \Gamma$ y todo boreliano $B \subset \text{Dom}(h)$. Decimos que μ es \mathcal{R} -casi-invariante si y solo si se cumple que

$$\mu(h(B)) = 0 \Leftrightarrow \mu(B) = 0$$

para cada $h \in \Gamma$ y cada boreliano $B \subset \text{Dom}(h)$.

Observación 4.32. Un pseudogrupo Γ sobre un espacio topológico X define una relación orbital \mathcal{R}_Γ dada por

$$x\mathcal{R}_\Gamma y \Leftrightarrow y = h(x), \text{ para algún } h \in \Gamma$$

para $x, y \in X$

Proposición 4.33. Sea Γ un pseudogrupo actuando sobre X . Entonces \mathcal{R}_Γ es una relación étale dotada de la topología generada por los abiertos $U_h = \{(x, h(x)) : x \in \text{Dom}(h)\}$ con $h \in \Gamma$.

Demostración. La proyección p_1 restringida a un abierto básico U_h es un homeomorfismo ya que los pseudogrupos son cerrados para las restricciones a abiertos por la propiedad (I) de la definición 4.30. Luego p_1 es un homeomorfismo local. Además, por ser Γ cerrado para la inversión, si $U \subset \mathcal{R}_\Gamma$ es un abierto, entonces también lo es $U^{-1} \subset \mathcal{R}_\Gamma$. De esta última afirmación deducimos que p_2 también es un homeomorfismo local. Por último, observando que Γ es cerrado para la multiplicación, tenemos que para cualquier par de abiertos U y V de \mathcal{R}_Γ , el conjunto UV es abierto. \square

Recíprocamente, dada una relación de equivalencia étale \mathcal{R} , puede construirse un pseudogrupo Γ cuya relación de equivalencia orbital \mathcal{R}_Γ es isomorfa a \mathcal{R} . En efecto, para cada elemento $(x, y) \in \mathcal{R}$, existe un entorno abierto $A \subset \mathcal{R}$ de (x, y) tal que las restricciones de las proyecciones p_1 y p_2 son homeomorfismos sobre sus imágenes. Se dice que A es un bisección de \mathcal{R} . De esta forma obtenemos una transformación local mediante el homeomorfismo

$$h = p_2|_A \circ p_1|_A^{-1} : p_1(A) \longrightarrow p_2(A).$$

Esta familia de homeomorfismos genera un pseudogrupo Γ cuyas órbitas coinciden con las clases de \mathcal{R} .

Podemos deducir entonces que hay una correspondencia biunívoca entre los pseudogrupos de transformaciones locales y las relaciones de equivalencia étale, que se extiende a las medidas (casi)-invariantes.

Proposición 4.34. *Sea X un espacio topológico dotado de una medida de Borel μ . Sea \mathcal{R} una relación de equivalencia étale y Γ su pseudogrupo asociado. Entonces μ es \mathcal{R} -invariante (respectivamente \mathcal{R} -casi-invariante) si y solo si es Γ -invariante (respectivamente Γ -casi-invariante)*

Demostración. Se deduce directamente de la correspondencia entre los pseudogrupos de transformaciones locales y las relaciones de equivalencia étale. \square

Proposición 4.35. *Sea \mathcal{R} una relación de equivalencia étale sobre X . Sea μ una medida \mathcal{R} -casi-invariante sobre X . Entonces el soporte $\text{sop}(\mu)$ es un boreliano \mathcal{R} -invariante.*

Demostración. Dado $x \notin \text{sop}(\mu)$, el punto x admite un entorno V de manera que $\mu(V) = 0$ por la definición 4.24. Se tiene entonces que cualquier $y \in \mathcal{R}[x]$ también admite un entorno W tal que $\mu(W) = 0$, ya que por ser μ \mathcal{R} -casi-invariante existe una transformación parcial $f \in \Gamma$ que verifica $f(x) = y$, y por tanto $y \notin \text{sop}(\mu)$. De esta manera, en virtud de la proposición 4.34, deducimos que $\text{sop}(\mu)$ es \mathcal{R} -invariante. \square

A continuación veremos bajo que condiciones sobre la topología \mathcal{T} del \mathcal{R} podemos afirmar que una relación de equivalencia étale $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ es discreta.

Proposición 4.36. *Sea \mathcal{R} una relación de equivalencia étale 2-numerable. Entonces \mathcal{R} es una relación boreliana discreta.*

Demostración. Según lo visto en la proposición 4.29, las fibras son siempre discretas y, además, suponiendo que \mathcal{T} es una topología que hace de (X, \mathcal{T}) un espacio 2-numerable, las fibras son numerables. \square

De hecho, la condición de la existencia de una base numerable de la topología \mathcal{T} puede caracterizarse del siguiente modo:

Proposición 4.37 ([36]). *Sea \mathcal{R} una relación de equivalencia étale sobre un espacio 2-numerable X . Entonces \mathcal{R} 2-numerable si y solo si \mathcal{R} es la relación de equivalencia orbital de un pseudogrupo Γ de generación numerable.*

Demostración. Sea \mathcal{R} una relación de equivalencia étale dotada de una topología \mathcal{T} 2-numerable. Consideramos los homeomorfismos que generan el pseudogrupo Γ

$$h = p_2|_U \circ p_1|_U^{-1} : p_1(U) \longrightarrow p_2(U),$$

obtenidos a partir de bisecciones $U \subset \mathcal{R}$ de $(x, y) \in \mathcal{R}$. Por ser la topología 2-numerable, el pseudogrupo de transformaciones Γ es de generación numerable. Además, si Γ es de generación numerable y la familia $\{h_i\}$ es un conjunto de generadores, entonces las bisecciones $U_h = \{(h, h_n(x)) : x \in \text{Dom}(h)\}$ forman una base numerable de \mathcal{T} . \square

Por último se enuncia un lema, probado en [3], que nos será de gran utilidad en la sección 4.5.

Lema 4.38. *Sea X un espacio topológico T_1 y 1-numerable. Sean $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ dos relaciones de equivalencia borelianas discretas definidas sobre X . Sea μ una medida de probabilidad casi-invariante y ergódica respecto de la relación \mathcal{R} . Dado $x \in \text{sop}(\mu)$ tal que $\mathcal{L}(x) = \{x\}$, si Z es un cerrado minimal respecto de la relación \mathcal{L} , entonces $Z = \{x\}$ o $\mu(Z) = 0$.*

4.2. Espacio de Gromov-Hausdorff

En adelante, igual que hacíamos al considerar los grafos de Cayley, G será un grupo finitamente generado y S un conjunto de generadores simétrico que no contiene al elemento neutro, i.e, $S = S^{-1}$ y $1 \notin S$. Seguimos aquí los estudios de Á. Lozano Rojo [26] y A.C. Vázquez [36] de un concepto introducido por É. Ghys en [14].

Definición 4.39. El espacio de *Gromov-Hausdorff* \mathcal{G} asociado al grafo de Cayley $\mathbb{G}(G, S)$ es el espacio formado por todos los subgrafos conexos de \mathbb{G} que contienen al neutro del grupo G (que denotaremos por 1), es decir,

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbb{G}, S) = \{\mathbb{H} \subset \mathbb{G} : \mathbb{H} \text{ subgrafo conexo tal que } 1 \in \mathbb{H}\}$$

El hecho de considerar los subgrafos que contienen al neutro es importante pues permite dotar a cada grafo de una estructura de grafo enraizado con la misma raíz para todos, lo que nos permite comparar las bolas alrededor de la raíz.

Al igual que en los grafos de Cayley, podemos dotar a este espacio de una métrica en la que dos subgrafos de \mathcal{G} están más cerca cuanto mayor sea la bola alrededor del origen en la que ambos grafos coinciden. Para formalizar esta distancia necesitamos introducir previamente el concepto de *radio de coincidencia*, que es una aplicación

$$R : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

definida por

$$R(\mathbb{H}, \mathbb{H}') = \sup\{N \geq 0 : B_{\mathbb{H}}(1, N) = B_{\mathbb{H}'}(1, N)\},$$

esto es, el mayor de los radios para el cual las bolas cerradas centradas en 1 en \mathbb{H} y \mathbb{H}' coinciden. Cuando no haya lugar a ambigüedades hablaremos simplemente de radio para referirnos al radio de coincidencia. Una vez definido el radio, buscamos como función distancia una función positiva que disminuya a medida que aumenta el radio y que se anule

cuando los dos grafos sean iguales, o lo que es lo mismo, cuando el radio de coincidencia sea infinito. Para ello escogemos

$$\begin{aligned} d : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\longrightarrow [0, 1] \\ (\mathbb{H}, \mathbb{H}') &\longmapsto e^{-R(\mathbb{H}, \mathbb{H}')} \end{aligned}$$

Proposición 4.40. *La distancia d es una ultramétrica, esto es,*

$$d(\mathbb{H}, \mathbb{H}') \leq \max\{d(\mathbb{H}, \mathbb{H}''), d(\mathbb{H}', \mathbb{H}'')\} \quad (4.1)$$

para cada $\mathbb{H}, \mathbb{H}', \mathbb{H}'' \in \mathcal{G}$.

Demostración. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$B_{\mathbb{H}}(1, N) = B_{\mathbb{H}'}(1, N) \quad \text{y} \quad B_{\mathbb{H}'}(1, N) = B_{\mathbb{H}''}(1, N),$$

entonces

$$B_{\mathbb{H}}(1, N) = B_{\mathbb{H}''}(1, N),$$

luego

$$R(\mathbb{H}, \mathbb{H}'') \geq \min\{R(\mathbb{H}, \mathbb{H}'), R(\mathbb{H}', \mathbb{H}'')\}$$

que prueba la desigualdad 4.1. □

Esta desigualdad tiene importantes consecuencias en las propiedades de la distancia: todas las bolas abiertas y cerradas con esta métrica y cualquier punto de éstas es su centro. Podemos deducir además el siguiente corolario:

Corolario 4.41. *El espacio $\mathcal{G}(G, S)$ es totalmente desconexo, 2-numerable y separable.*

Demostración. El espacio es totalmente desconexo porque los puntos son abiertos y cerrados. La 2-numerabilidad y la separabilidad se deducen observando que hay una cantidad numerable de bolas para cada radio y por consiguiente, como los radios toman valores naturales, una cantidad de bolas numerable en general. □

Definición 4.42. Decimos que una sucesión (\mathbb{H}_n) converge a \mathbb{H} si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathbb{H}_n, \mathbb{H}) = 0.$$

Equivalentemente si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(\mathbb{H}_n, \mathbb{H}) = \infty. \quad (4.2)$$

Sea

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(G, S) = \{\mathbb{H} \in \mathcal{G}(G, S) : \mathbb{H} \text{ es un árbol}\} \subset \mathcal{G}(G, S)$$

el conjunto de los árboles de $\mathcal{G}(G, S)$. Usando la condición 4.2, podemos ver que $\mathcal{T}(G, S)$ es un cerrado de $\mathcal{G}(G, S)$. En efecto, sea $(\mathbb{H}_n) \subset \mathcal{T}(G, S)$ una sucesión de árboles convergente a un grafo $\mathbb{H} \in \mathcal{G}(G, S)$. Para cualquier lazo $\sigma \neq 1$ del grafo \mathbb{H} , existe un número natural N_σ de manera que σ está contenido en la bola $B_H(1, N_\sigma)$. Ahora bien, en virtud de la condición 4.2, podemos garantizar la existencia de un entero positivo N_0 que verifica que $B_{\mathbb{H}_n}(1, N_\sigma) = B_{\mathbb{H}}(1, N_\sigma)$, para cualquier $n \geq N_0$. Concluimos entonces que \mathbb{H}_n no es un árbol si $n \geq N_0$, pues contiene una copia del lazo σ .

Proposición 4.43. *El espacio métrico $(\mathcal{G}(G, S), d)$ es compacto.*

Demostración. Tomamos una sucesión $\mathbb{H}_n \subset \mathcal{G}(G, S)$. Primero conviene observar que solamente hay una cantidad finita de grafos de diámetro 2, de nuevo se trata de una cuestión simple de combinatoria observando que el conjunto S , que determina las posibles aristas que pueden salir de cada vértice, es finito. Podemos entonces escoger una subsucesión $(\mathbb{H}_{1,n})$ de forma que

$$B_{\mathbb{H}_{1,n}}(1, 1) = \mathbb{H}_1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, siendo $\mathbb{H}_1 \in \mathcal{G}$ un grafo de diámetro 2. Repitiendo este proceso, si $(\mathbb{H}_{k,n})$ es una subsucesión de (\mathbb{H}_n) tal que

$$B_{\mathbb{H}_{k,n}}(1, 1) = \mathbb{H}_k,$$

con $\mathbb{H}_k \in \mathcal{G}$ de diámetro $2k$. Entonces, razonando por inducción, podemos construir una subsucesión $\mathbb{H}_{k+1,n}$ de (\mathbb{H}_n) de forma que

$$B_{\mathbb{H}_{k+1,n}}(1, 1) = \mathbb{H}_{k+1},$$

siendo \mathbb{H}_{k+1} un subgrafo de diámetro $2(k+1)$ que contiene a \mathbb{H}_k . Tenemos por tanto una sucesión creciente de grafos finitos:

$$\mathbb{H}_1 \subset \dots \mathbb{H}_k \subset \dots$$

Si definimos $\mathbb{H} = \bigcup_{k \in \mathbb{H}} \mathbb{H}_k$, entonces \mathbb{H} es el grafo límite de la sucesión diagonal $(\mathbb{H}_{k,k})$. En efecto, por construcción, la función $R(\mathbb{H}_{k,k}, \mathbb{H}) \geq k$, luego

$$d(\mathbb{H}_{k,k}, \mathbb{H}) \leq e^{-k} \rightarrow 0.$$

□

Como consecuencia de la proposición anterior, $\mathcal{G}(G, S)$ es un espacio boreliano estándar dotado de la σ -álgebra de Borel. De esta prueba deducimos además que cualquier grafo infinito se puede obtener como límite de sucesiones de grafos finitos, las bolas centradas en 1. Además, si \mathbb{H} es un grafo finito, entonces la bola en $\mathcal{G}(G, S)$ de centro \mathbb{H} y radio $\max\{d_{\mathbb{H}}(1, x) : x \in \mathbb{H}\}$ se reduce al grafo \mathbb{H} . Luego el conjunto derivado \mathcal{G}' de $\mathcal{G}(G, S)$, está formado por los grafos infinitos.

Ejemplo 4.44. (1) Si G es un grupo finito, entonces \mathcal{G} también lo es y, por lo que hemos visto, está dotado de la topología discreta.

(2) Si $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{\pm 1\}$, el conjunto derivado \mathcal{G}' está formado por dos sucesiones (correspondientes a los subgrafos $[-n, +\infty]$ y $[-\infty, n]$ de \mathbb{R}) que convergen al grafo de Cayley $\mathbb{G}(\mathbb{Z}, S) = \mathbb{R}$. Luego el espacio de Gromov-Hausdorff \mathcal{G} es infinito numerable.

Observación 4.45. Si G es no finito, el espacio de Gromov-Hausdorff $\mathcal{G}(G, S)$ es infinito no numerable salvo en el caso $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{\pm 1\}$.

Proposición 4.46 ([26] Proposición 3.4). *Si G es infinito y no estamos en el caso $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{\pm 1\}$, entonces el conjunto derivado de $\mathcal{G}(G, S)$ es un conjunto de Cantor.*

Demostración. En virtud de las proposición 4.43 y del corolario 4.41, $\mathcal{G}(G, S)$ es un espacio compacto y totalmente desconexo, luego nos basta probar que \mathcal{G} es perfecto, i.e, $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$. Como ya vimos, todo grafo $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$ es límite de grafos finitos, tomando como sucesión las bolas centradas en el origen de radio n y "extendiéndolas" en determinada dirección. El proceso es el siguiente: dado n natural, tomamos un camino infinito $\epsilon_n \subset \mathbb{G}$ de manera que

$$\epsilon_n \cap B_{\mathbb{H}}(1, n) = \{x_n\} \in \partial B_{\mathbb{H}}(1, n).$$

Esta elección del camino es posible porque \mathbb{G} es infinito y conexo. Se tiene por tanto que la sucesión $\mathbb{H}_n^{\epsilon_n} = B_{\mathbb{H}}(1, n) \cup \epsilon_n$ converge a \mathbb{H} .

Si quisiésemos podríamos además considerar caminos ϵ_n tales que $\mathbb{H}_n^{\epsilon_n} \neq \mathbb{H}$ salvo en el caso de $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{\pm 1\}$. Supongamos que existe un natural n para el cual cualquier camino ϵ en las condiciones anteriores verifique que $\mathbb{H}_n^{\epsilon} = \mathbb{H}$. En estas condiciones, todos los caminos serían el mismo por lo que la valencia de cualquier vértice de ϵ es 2. En virtud

de la proposición 2.8, G actúa por automorfismos sobre \mathbb{G} , luego la valencia de cualquier vértice de \mathbb{G} es 2 y por consiguiente \mathbb{G} es una recta. Se tiene por tanto que $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{\pm 1\}$. \square

Podemos deducir a partir de esta proposición que el conjunto derivado de $\mathcal{T}(G, S)$ son los árboles infinitos y es homeomorfo a un Cantor salvo en el caso indicado. Podemos observar también que, si $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{\pm 1\}$ entonces $\mathcal{G}(G, S) = \mathcal{T}(G, S)$.

Proposición 4.47. *Si G es un grupo infinito, entonces el subespacio $\mathcal{T}(G, S)$ no es abierto salvo cuando el grupo G es un grupo libre y S es un sistema canónico de generadores, en cuyo caso $\mathcal{T}(G, S) = \mathcal{G}(G, S)$.*

Demostración. Si G no es un grupo libre, o S contiene relaciones, podemos encontrar un grafo tan cerca como queramos de un árbol. Por hipótesis, existe un lazo no trivial σ basado en el neutro en el grafo $\mathbb{G}(G, S)$. Consideremos un árbol finito $\mathbb{T} \in \mathcal{T}$ y un número natural n . Por ser los árboles conexos y $1 \in \mathbb{T}$, sabemos que existe $x \in T$ de manera que $d(1, x) = n$. Tenemos pues que el grafo $\mathbb{T}' = \mathbb{T} \cup \sigma$ verifica que $R(\mathbb{T}', \mathbb{T}) = n$. Por construcción, el interior de \mathcal{T} está formado por los árboles finitos que contienen al elemento neutro 1.

En cambio, si G es un grupo libre, entonces \mathbb{G} es un árbol y entonces $\mathcal{T}(G, S) = \mathcal{G}(G, S)$. \square

Observación 4.48. El conjunto $\mathcal{T}(G, S)'$ es un conjunto de Cantor con interior vacío contenido en el cantor $\mathcal{G}(G, S)'$ excepto en el caso de los grupos finitos y los grupos libres.

4.3. Dinámica del espacio de Gromov-Hausdorff

Podemos dotar a $\mathcal{G}(G, S)$ de una relación de equivalencia \mathcal{R} consistente en cambiar el punto base

$$\mathcal{R} = \{(\mathbb{H}, \mathbb{H}') : \mathbb{H}' = \mathbb{H}g^{-1} \text{ para algún } g \in \mathbb{H}\}. \quad (4.3)$$

El grafo consistente en cambiar el punto base de 1 a g , es el *grafo trasladado* $\mathbb{H}g^{-1}$ de \mathbb{H} .

Para reformular la definición de la relación \mathcal{R} , consideremos el espacio

$$\tilde{\mathcal{G}} = \{(\mathbb{H}, g) : g \in \mathbb{H} \subset \mathbb{G}\},$$

dotado de la pseudométrica

$$\tilde{d}((\mathbb{H}, g), (\mathbb{H}', g')) = e^{-\tilde{R}((\mathbb{H}, g), (\mathbb{H}', g'))},$$

donde

$$\tilde{R}((\mathbb{H}, g), (\mathbb{H}', g')) = \sup\{N \in \mathbb{N} : \exists g'' \in G \mid B_{\mathbb{H}}(g, N) = B_{\mathbb{H}'g''}(g'g'', N)\},$$

de forma que dos pares (\mathbb{H}, g) y (\mathbb{H}', g') están a distancia 0 si para cualquier $N \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un $g'' \in G$ de manera que $B_{\mathbb{H}}(g, N) = B_{\mathbb{H}'g''}(g'g'', N)$. Nótese que $B_{\mathbb{H}'g''}(g'g'', N) = B'_{\mathbb{H}}(g', N)g''$ es la imagen de una traslación por la derecha

$$\begin{aligned} t_{g''} : B_{\mathbb{H}'}(g', N) &\longrightarrow B_{\mathbb{H}'g''}(g'g'', N) \\ x &\longmapsto xg'' \end{aligned}$$

de la bola $B'_{\mathbb{H}}(g', N)$. Pero si se cumple para las bolas de cualquier radio podemos realizar un paso al límite y entonces estarán a distancia cero si existe un $g'' \in G$ tal que

$$(\mathbb{H}, g) = (\mathbb{H}g'', g'g'') \Leftrightarrow (\mathbb{H}g''^{-1}, gg''^{-1}) = (\mathbb{H}', g').$$

La acción por la derecha de G sobre el grafo de Cayley \mathbb{G} induce una acción por la izquierda

$$\begin{aligned} \phi : G \times \tilde{\mathcal{G}} &\longrightarrow \tilde{\mathcal{G}} \\ (g', (\mathbb{H}, g)) &\longmapsto (\mathbb{H}g'^{-1}, gg'^{-1}) \end{aligned}$$

que conserva la métrica \tilde{d} .

El espacio de órbitas $G \backslash \tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$. En efecto, por lo que acabamos de ver, la órbita de (\mathbb{H}, g) , está formada por los elementos de $\tilde{\mathcal{G}}$ a distancia cero de (\mathbb{H}, g) . Luego la proyección canónica

$$\begin{aligned} p : \tilde{\mathcal{G}} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ (\mathbb{H}, g) &\longrightarrow \mathbb{H}g^{-1} \end{aligned}$$

pasa a al cociente en una isometría

$$\begin{aligned} p : G \backslash \tilde{\mathcal{G}} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ [\mathbb{H}, g] &\longmapsto \mathbb{H}g^{-1} \end{aligned}$$

cuando dotamos a $G \backslash \tilde{\mathcal{G}}$ de la métrica inducida por \tilde{d} y a \mathcal{G} de la métrica d definida en la sección anterior.

Definición 4.49. Se define la relación de equivalencia en $\tilde{\mathcal{R}}$ en $\tilde{\mathcal{G}}$ como la relación consistente en cambiar el punto base, es decir,

$$\tilde{\mathcal{R}}[(\mathbb{H}, g)] = \{(\mathbb{H}, g') : g' \in \mathbb{H}\}.$$

La relación \mathcal{R} introducida en 4.3 es la relación de equivalencia inducida la relación $\tilde{\mathcal{R}}$, de modo que:

$$\mathcal{R}[\mathbb{H}] = p(\tilde{\mathcal{R}}[(\mathbb{H}, 1)]) = p(\{(\mathbb{H}, g) : g \in \mathbb{H}\}) = \{\mathbb{H}g^{-1} : g \in \mathbb{H}\}.$$

También podemos pensar \mathcal{R} como la relación de equivalencia orbital dada por la acción del pseudogrupo Γ generado por las traslaciones

$$\begin{aligned} \tau_g : \{\mathbb{H} \subset \mathbb{G} : g \in \mathbb{H}\} &\longrightarrow \{\mathbb{H}g^{-1} : g \in \mathbb{H}\} \\ \mathbb{H} &\longmapsto \mathbb{H}g^{-1} \end{aligned}$$

Proposición 4.50. *La relación de equivalencia \mathcal{R} es étale y 2-numerable*

Demostración. Por ser G un grupo finitamente generado deducimos que Γ es un pseudogrupo finitamente generado, ya que $\{\tau_s\}_{s \in S}$ sería un conjunto de generadores. Por tanto, en virtud de la proposición 4.37, la relación \mathcal{R} es étale y 2-numerable. \square

Observación 4.51. Podemos dotar a las órbitas de la relación \mathcal{R} de una estructura de grafo que, al igual que en los grafos de Cayley, está determinada por la elección del conjunto de generadores. Para ello, diremos que existe una arista que une $\mathbb{H}, \mathbb{H}' \in \mathcal{R}[\mathbb{H}]$ si existe un generador $s \in S$ de forma que $\tau_s(\mathbb{H}') = \mathbb{H}'s^{-1} = \mathbb{H}''$. Luego $\mathcal{R}[\mathbb{H}] \cong Iso(\mathbb{H}) \backslash \mathbb{H}$ siendo $Iso(\mathbb{H})$ la isotropía de \mathbb{H} por la acción $\psi : G \curvearrowright \mathcal{G}$ definida por $\psi(g, \mathbb{H}) = \mathbb{H}g^{-1}$, ya que

$$\mathbb{H}g^{-1} = \mathbb{H}g'^{-1} \Leftrightarrow g'^{-1}g \in Iso(\mathbb{H}).$$

Definición 4.52. A la clausura de la clase $\mathcal{R}[\mathbb{H}]$ de un grafo $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$ la llamamos *envoltura* de \mathbb{H} y se denota por $\Omega(\mathbb{H}) = \overline{\mathcal{R}[\mathbb{H}]}$, que claramente es un cerrado saturado de \mathcal{R} .

Definición 4.53. Decimos que un grafo $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$ es *periódico* (respectivamente *aperiódico*) si su saturación $\mathcal{R}[\mathbb{H}] = Iso(\mathbb{H}) \backslash \mathbb{H}$ es finito (respectivamente $\mathcal{R}[\mathbb{H}] = \mathbb{H}$), es decir, si su grupo de isotropía es cocompacto (respectivamente trivial).

Como se puede ver en [26], la minimalidad de la envoltura $\Omega(\mathbb{H})$ equivale al carácter repetitivo de \mathbb{H} . Geométricamente, un grafo es *repetitivo* si no se puede determinar en qué punto del grafo nos encontramos observando únicamente un entorno de éste.

Definición 4.54. Dados dos grafos $\mathbb{H}, \mathbb{H}' \in \mathcal{G}$, decimos que la bola $B_{\mathbb{H}}(x, r)$ se *embebe fielmente* en la bola $B_{\mathbb{H}'}(x', R)$, denotado por $B_{\mathbb{H}}(x, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}'}(x', R)$, si existe $g \in G$ de forma que la traslación por g de la bola en \mathbb{H} de centro x y radio r es una bola contenida en la bola de \mathbb{H}' , esto es,

$$t_g(B_{\mathbb{H}}(x, r)) = B_{\mathbb{H}}(x, r)g = B_{\mathbb{H}g}(xg, r) \subset B_{\mathbb{H}'}(x', R).$$

Definición 4.55. Se dice que un grafo $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$ es repetitivo si dado $r > 0$, existe $R > 0$ tal que $B_{\mathbb{H}}(1, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}}(y, R)$ para todo $y \in \mathbb{H}$. Si además se cumple que fijado $r > 0$, existe $R > 0$ de forma que $B_{\mathbb{H}}(1, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}}(y, R)$ para cualquier par de puntos $x, y \in \mathbb{H}$, entonces \mathbb{H} es uniformemente repetitivo.

Intuitivamente, un grafo es repetitivo (respectivamente uniformemente repetitivo) si cualquier bola centrada en el neutro (respectivamente en cualquier vértice del grafo) se puede encontrar como bola en las proximidades de cualquier otro punto. Los grafos finitos son trivialmente repetitivos.

El siguiente teorema nos da una caracterización de cuando un grafo es repetitivo y además que, en efecto, repetitivo y uniformemente repetitivo son conceptos equivalentes.

Teorema 4.56. ([26] Teorema 3.24) Para cada grafo $\mathbb{H} \in \mathcal{G}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (I) \mathbb{H} es uniformemente repetitivo.
- (II) \mathbb{H} es repetitivo.
- (III) $\Omega(\mathbb{H})$ es minimal.

Demostración. (I) \Rightarrow (II) es trivial. (II) \Rightarrow (III) Para probar que Ω es minimal tenemos que ver que la clase de equivalencia de cada grafo $\mathbb{H}' \in \Omega(\mathbb{H})$ es densa en $\Omega(\mathbb{H})$. Obsérvese que $\Omega(\mathbb{H}') \subset \Omega(\mathbb{H})$, de manera que nos basta con demostrar que $\mathbb{H} \in \Omega(\mathbb{H}')$, en cuyo caso $\Omega(\mathbb{H}) \subset \Omega(\mathbb{H}')$. Fijemos un radio $r > 0$. Por ser \mathbb{H} repetitivo, sabemos que existe un $R \geq r$ tal que $B_{\mathbb{H}}(1, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}'}(y, R)$ para todo $y \in \mathbb{H}$. Ahora bien, $\mathbb{H}' \in \Omega(\mathbb{H})$, luego existe un elemento $x \in \mathbb{H}$ para el cual $\mathbb{H}' = \mathbb{H}x^{-1}$ y se cumple que

$$B_{\mathbb{H}'}(1, R) = B_{\mathbb{H}x^{-1}}(1, R) = B_{\mathbb{H}}(x, R)x^{-1}.$$

Tomando entonces $y = x$, la bola $B_{\mathbb{H}}(1, r)$ se embebe fielmente en la bola $B_{\mathbb{H}'}(x, R)$. Por lo tanto,

$$B_{\mathbb{H}}(1, R)gx^{-1} = B_{\mathbb{H}}(g, r)x^{-1} \subset B_{\mathbb{H}}(x, R)x^{-1} = B_{\mathbb{H}'}(1, R)$$

para algún $g \in G$. Sea $h = gx^{-1}$, entonces

$$B_{\mathbb{H}}(1, r) = B_{\mathbb{H}'}(h, r)h^{-1} = B_{\mathbb{H}'h^{-1}}(1, r)$$

de forma que $d(\mathbb{H}, \mathbb{H}') < e^{-r}$. Como \mathbb{H} es límite de trasladados de \mathbb{H}' , concluimos que $\mathbb{H} \in \Omega(\mathbb{H}')$. (III) \Rightarrow (II) Para $r > 0$ y cada entero $S > 0$, veamos que la familia de conjuntos

$$U_S = \{\mathbb{H}' \in \Omega(\mathbb{H}) : B_{\mathbb{H}}(1, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}'}(1, S)\}$$

forma un recubrimiento abierto de $\Omega(\mathbb{H})$. Por ser $\Omega(\mathbb{H})$ minimal, para cada $\mathbb{H}' \in \Omega(\mathbb{H})$ existe un elemento $x' \in \mathbb{H}'$ tal que $B_{\mathbb{H}}(1, r) = B_{\mathbb{H}'}(x', r)x'^{-1}$. Luego

$$B_{\mathbb{H}'} \hookrightarrow B_{\mathbb{H}'}(1, S)$$

para $S \geq r + d(1, x')$, de lo cual deducimos que $\mathbb{H}' \in U_S$. Observamos también que $\{U_S\}_{S>0}$ es monótona creciente para la inclusión. Además, como $\Omega(\mathbb{H})$ es compacto, existe $R > 0$ tal que $\Omega(\mathbb{H}) = U_R$, lo que determina un elemento maximal de nuestra sucesión. Para cada $y \in \mathbb{H}$, el grafo trasladado $\mathbb{H}y^{-1} \in U_R$, luego

$$B_{\mathbb{H}}(1, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}y^{-1}}(1, R)$$

lo cual que significa que

$$B_{\mathbb{H}}(1, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}}(y, R)$$

(III \Rightarrow (I)) Fijemos $r > 0$ y $x \in \mathbb{H}$. Igual que en el caso anterior, para cada entero $S > 0$, definimos el conjunto

$$U_S^x = \{\mathbb{H}' \in \Omega(\mathbb{H}) : B_{\mathbb{H}}(x, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}'}(1, S)\}.$$

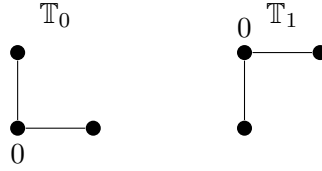
Por un razonamiento análogo al anterior, deducimos que existe un radio $R_r^x > 0$ de tal manera que $B_{\mathbb{H}}(x, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}'}(y, R_r^x)$ para cualquier $y \in \mathbb{H}$. Sin embargo, para afirmar que \mathbb{H} es uniformemente repetitivo necesitamos que este radio sea independiente de del punto x . No obstante, dado que hay un número finito de clases de traslación de bolas $B_{\mathbb{H}}(x, r)$ para $r > 0$ fijado, existe una familia finita de puntos $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{H}$ de forma que las bolas $B_{\mathbb{H}}(x_i, r)$ determinan todas las posibles clases de traslación. Basta entonces tomar el R_r como el máximo de todos los radios R_r^x para concluir que $B_{\mathbb{H}}(x, r) \hookrightarrow B_{\mathbb{H}}(1, R_r)$ para cada $x, y \in \mathbb{H}$. \square

Corolario 4.57. *Si \mathbb{H} es un grafo repetitivo, entonces todos los elementos de $\Omega(\mathbb{H})$ son repetitivos.*

Demostración. Como ya vimos, $\mathbb{H}' \in \Omega(\mathbb{H})$ implica $\Omega(\mathbb{H}') \subset \Omega(\mathbb{H})$. Por lo tanto, utilizando el teorema anterior concluimos que $\Omega(\mathbb{H})$ es minimal y, por consiguiente, también lo es $\Omega(\mathbb{H}')$. Luego \mathbb{H}' es repetitivo. \square

4.4. Minimal de Ghys-Kenyon

En la anterior sección hemos construido el espacio de Gromov-Hausdorff y hemos visto que sus conjuntos minimales son precisamente las envolturas de los grafos repetitivos. Además en el ejemplo 4.44 hemos estudiado el caso de $(G)(\mathbb{Z}, S)$ con $S = \{\pm 1\}$ viendo que era un espacio numerable. Si cambiamos \mathbb{Z} por \mathbb{Z}^2 , la situación cambia drásticamente, ya que como ya comentamos en la observación 4.45, el espacio de espacio de Gromov-Hausdorff ya no sería numerable y la cantidad de ejemplos interesantes que podemos encontrar en $\mathcal{G}(\mathbb{Z}^2)$ es enorme. Veamos que podemos realizar el *shift de Bernoulli* dentro de $\mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$. Sean \mathbb{T}_0 y \mathbb{T}_1 los árboles que se muestran a continuación:



A cada sucesión $\alpha = \{\alpha_n\} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, le hacemos corresponder el árbol $\Psi(\alpha)$ (después describiremos con detalle cómo construir este tipo de aplicaciones) que se define como unión de los árboles $\mathbb{T}_{\alpha_n} + (n, 0)$, que obtenidos al trasladar el árbol \mathbb{T}_{α_n} mediante el vector $(n, 0)$. Es sencillo comprobar que la aplicación

$$\Psi : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$$

es un embebimiento compatible con la relación de equivalencia orbital definida por el shift de Bernoulli $\sigma(\{\alpha_n\}) = \{\alpha_{n+1}\}$ y la relación de equivalencia \mathcal{R} (o si se prefiere la relación inducida sobre la imagen de Ψ). Diremos que hay una *equivalencia orbital estable* o *de Morita* entre el shift y la saturación de la imagen de Ψ . Como las órbitas son casi-isométricas, la equivalencia es una *equivalencia de Kakutani*. Las definiciones precisas pueden verse en [26].

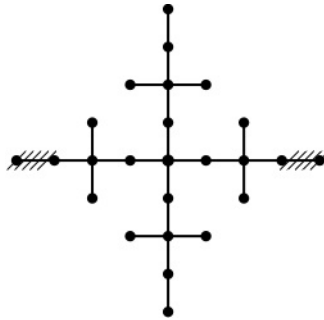
Pero hay ejemplos mucho más interesantes en el espacio $\mathcal{G}(\mathbb{Z}^2)$. En esta sección abordaremos en detalle un ejemplo clásico de conjunto minimal, llamado *minimal de Ghys-Kenyon*. Un estudio más detallado se puede ver en [2][5][26].

Para ello se considera el grafo de Cayley $\mathbb{G} = \mathbb{G}(G, S)$ de grupo $G = \mathbb{Z}^2$ y el conjunto de generadores simétrico $S = \{\pm(1, 0), \pm(0, 1)\}$. Ahora describiremos un subárbol aperiódico y repetitivo llamado *árbol de Kenyon*. La envoltura de este subgrafo se denomina *conjunto minimal de Ghys-Kenyon* (recordemos que por ser repetitivo, en virtud del teorema 4.56 tenemos garantizada la minimalidad de su envoltura).

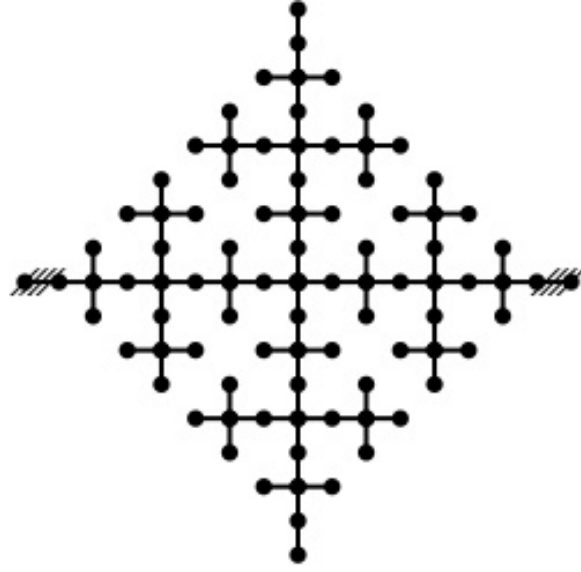
Para construir el árbol de Kenyon comenzamos tomando la siguiente pieza elemental \mathbb{T}_1 de \mathbb{G} centrada en el neutro $(0, 0) \in \mathbb{G}$.



En un segundo paso consideramos una traslación de \mathbb{T}_1 mediante el vector $(0, 2)$, es decir, consideramos la figura centrada en $(0, 2) \in \mathbb{G}$. Acto seguido le aplicamos tres rotaciones de ángulos $\pi/2, \pi$ y $3\pi/2$ respectivamente. Después eliminamos las dos aristas terminales del segmento horizontal situadas a la izquierda y a la derecha del segmento horizontal de longitud 2^3 contenido en el árbol resultante. De esta manera tendríamos construido el árbol \mathbb{T}_2 :



Repetimos el proceso y trasladamos el árbol \mathbb{T}_2 mediante el vector $(0, 4)$, volvemos a aplicar las mismas rotaciones y eliminamos las aristas terminales del segmento horizontal de longitud 2^4 . Así obtenemos el árbol \mathbb{T}_3 :

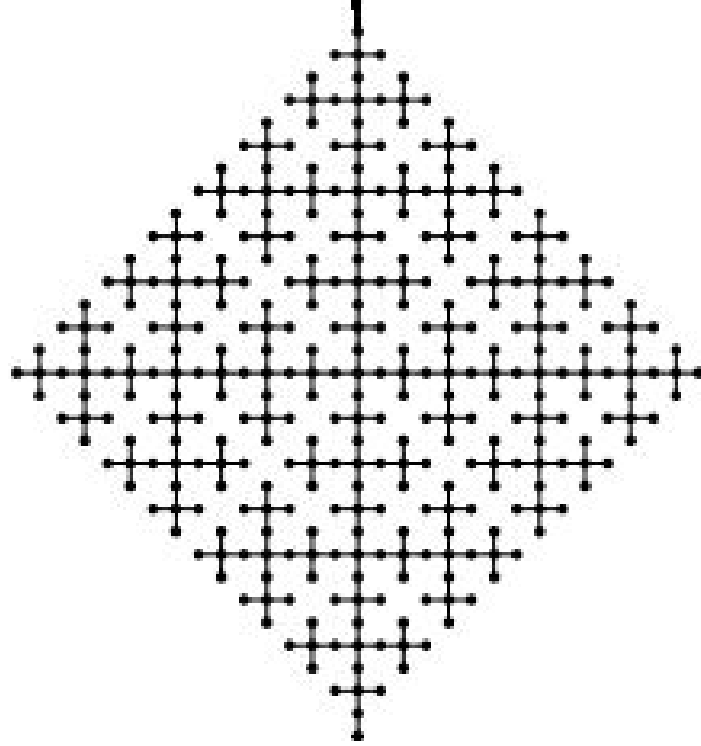


Continuando este proceso de manera recursiva, en la etapa n -ésima obtenemos un árbol \mathbb{T}_n que corta a los ejes vertical y horizontal en los intervalos $\{0\} \times [-2^n, 2^n]$ y $[-2^n + 1, 2^n + 1] \times \{0\}$ respectivamente.

Definición 4.58. Se define el *árbol de Kenyon*

$$\mathbb{T}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{T}_n$$

como el subárbol de $\mathbb{G}(\mathbb{Z}^2, \{\pm(1, 0), \pm(0, 1)\})$



Proposición 4.59. [14] *El árbol de Kenyon \mathbb{T}_∞ es un árbol aperiódico y repetitivo con cuatro finales.*

Demostración. Primero observamos que \mathbb{T}_∞ contiene dos rectas que cortan el $(0,0)$, y de hecho este es el único punto del árbol por el que pasan dos rectas, ya que si hubiese otro se formaría un bucle. De esta forma \mathbb{T}_∞ tiene cuatro finales, uno asociado a cada semirrecta contenida en el grafo. Por otra parte, por construcción, la bola $B_{\mathbb{T}_\infty}(0, 2^n)$ se embebe fielmente en cualquier bola $B_{\mathbb{T}_\infty}(y, 2^{n+1} + 1)$, luego \mathbb{T}_∞ es repetitivo. \square

Definición 4.60. Se define el *minimal de Ghys-Kenyon* como la envoltura del árbol \mathbb{T}_∞ y la denotaremos por $\Omega_{\mathbb{T}_\infty}$.

Para describir los árboles que forman $\Omega_{\mathbb{T}_\infty}$ podemos utilizar una notación introducida en [2]. Denotamos por S_4 al conjunto de sucesiones formadas por elementos de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. El conjunto $S_4 = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ se dota de la topología producto de la topología discreta sobre $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, generada por los cilindros

$$C_{i_0 \dots i_n}^{\alpha_0 \dots \alpha_n} = \{ \{ \beta_n \} \in S_4 : \beta_{i_j} = \alpha_j, j = 0, \dots, n \}.$$

Por construcción, S_4 es un espacio de Cantor. A las sucesiones de S_4 les asociaremos un elemento de $\Omega_{\mathbb{T}_\infty}$ mediante la función

$$\begin{aligned} r : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto e^{\frac{\pi}{2}ix}, \end{aligned}$$

utilizando la identificación natural entre \mathbb{C} y \mathbb{R} . A partir de esta aplicación, podemos definir una aplicación

$$\Phi : S_4 \longrightarrow \mathbb{T}_\infty$$

de manera inductiva como sigue. Sea $\alpha = \alpha_0 \dots \alpha_n \dots$. Partimos del punto $x_0^\alpha = 0$, definimos $x_1^\alpha = r(\alpha_0)$ y unimos $x_0^\alpha = 0$ y $x_1^\alpha = 0$ mediante una arista. Del mismo modo que hacíamos en el árbol de Kenyon, replicamos este conjunto alrededor del punto x_1^α mediante tres giros de ángulos $\pi/2, \pi$ y $3\pi/2$ respectivamente. Al conjunto resultante lo llamamos \mathbb{T}_{α_0} . A continuación extendemos \mathbb{T}_{α_0} en la dirección de $r(\alpha_1)$ mediante una arista de longitud 1 que une uno de los extremos de \mathbb{T}_{α_0} con un nuevo punto x_2^α a distancia 2 del punto x_1^α . Volvemos a repetir el proceso de réplica alrededor el punto X_2^α para obtener, así, el árbol $\mathbb{T}_{\alpha_0\alpha_1}$. Siguiendo este procedimiento de forma recursiva obtenemos una familia de árboles encajados $\{\mathbb{T}_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Definimos

$$\Phi(\alpha) = \mathbb{T}_\alpha := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{T}_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n}.$$

Como se demuestra en [2], cualquier grafo de $\Omega_{\mathbb{T}_\infty}$ que no esté en la clase de \mathbb{T}_∞ y cuyo origen sea un vértice de valencia 1 o 2 puede ser descrito como imagen mediante la aplicación Φ de una única sucesión $\alpha \in S_4$.

Proposición 4.61 ([2]). *El conjunto minimal de Ghys-Kenyon admite la siguiente descomposición como unión disjunta*

$$\Omega_{\mathbb{T}_\infty} = \mathcal{R}[\mathbb{T}_\infty] \sqcup \bigcup_{\alpha \in S_4} \mathcal{R}[\mathbb{T}_\alpha].$$

Además, la relación de equivalencia inducida sobre el conjunto $\Omega_{\mathbb{T}_\infty} \setminus \mathcal{R}[\mathbb{T}_\infty] = \bigcup_{\alpha \in S_4} \mathcal{R}[\mathbb{T}_\alpha]$ coincide con la relación de equivalencia cofinal que identifica dos sucesiones $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$ y $\beta = \beta_1 \dots \beta_n \dots$ si existe un número $N \in \mathbb{N}$ de manera que $\alpha_n = \beta_n$ para cualquier $n \geq N$. Obsérvese que por ser \mathbb{T}_∞ aperiódico, $\mathcal{R}[\mathbb{T}_\infty] = \{\mathbb{T}_\infty\}$.

4.5. Subgrafos aleatorios de grafos de Cayley

En esta última sección estudiaremos el concepto de *grafo aleatorio* (introducido por D. Alcoux y R. Lyons en [4]) en un caso particular.

Definición 4.62. Un *subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley* es una variable aleatoria cuyo espacio de estados es el espacio de Gromov-Hausdorff, esto es, una aplicación medible

$$\Theta : (X, \mu) \longrightarrow \mathcal{G}$$

definida sobre un espacio de probabilidad (X, μ) que toma valores en el espacio de Gromov-Hausdorff \mathcal{G} . La distribución de la variable Θ viene dada por $\mathbb{P} = \Theta_*(\mu)$.

La forma usual de construir subgrafos aleatorios de un grafo de Cayley \mathbb{G} consiste en fijar el conjunto $\Omega = \{0, 1\}^E$ como espacio de configuración, siendo $E = E(\mathbb{G})$ el conjunto de aristas del grafo de Cayley \mathbb{G} . Lo que estamos haciendo es "colorear" las aristas del grafo de dos colores distintos, blanco para el 0 y negro para el 1, de manera que si una arista se pinta de blanco, no está en el grafo y si se pinta de negro sí. Los coloreados vienen a representar funciones características de subconjuntos de E . Para formalizar esta idea se considera el espacio Ω con la topología producto, de manera que la σ -álgebra de los borelianos está generada por los cilindros

$$C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = \{\omega \in \Omega : \omega(e_i) = \alpha_i, i = 1, \dots, n\}$$

donde $e_i \in E$ y $\alpha_i \in \{0, 1\}$. Dado un *coloreado* ω decimos que una arista $e \in E$ está *abierta* si $\omega(e) = 1$ y *cerrada* si $\omega(e) = 0$.

Definición 4.63. Llamamos *proceso de percolación* en un grafo de Cayley \mathbb{G} a una medida de probabilidad P sobre el espacio de coloreados Ω .

La idea es que a cada coloreado $\omega \in \Omega$ le asociaremos un subgrafo recubridor $\mathbb{G}(\omega) \subset \mathbb{G}$ cuyo conjunto de aristas $E(\mathbb{G}(\omega))$ es el conjunto de aristas abiertas de ω , es decir $1_{E(\mathbb{G}(\omega))}$ es la función característica del conjunto de aristas de $\mathbb{G}(\omega)$.

Observación 4.64. A diferencia de los elementos del espacio de Gromov-Hausdorff \mathcal{G} los grafos obtenidos por percolación no tienen por qué ser conexos. A las componentes conexas de estos subgrafos aleatorios las denominamos *clústeres*.

Definición 4.65. Para cada $g \in G$, denotamos por $C_g(\omega)$ al clúster que contiene al vértice $g \in \mathbb{G}$. Podemos entonces definir la *aplicación clúster*

$$C : \Omega \longrightarrow \mathcal{G}$$

que envía cada $\omega \in \Omega$ en el clúster $C_1(\omega)$ del neutro.

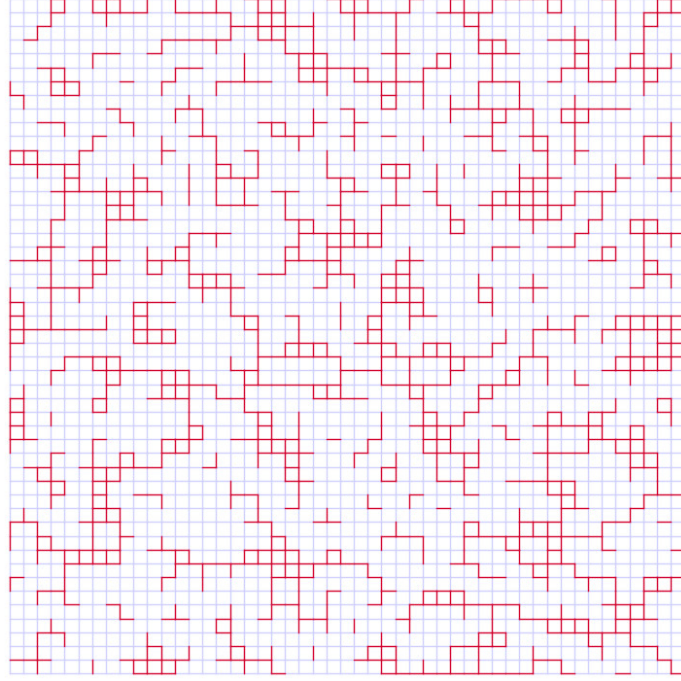


Figura 4.1: Coloreado de un proceso de percolación del grafo de Cayley $\mathbb{G}(\mathbb{Z}^2, S)$, $S = \{\pm(1, 0), \pm(0, 1)\}$ construido por percolación.

El siguiente resultado nos sirve para demostrar que la aplicación clúster es medible y, por consiguiente, define un subgrafo aleatorio.

Lema 4.66. *La aplicación clúster $C : \Omega \rightarrow \mathcal{G}$ es continua.*

Demostración. Sea $B_{\mathcal{G}}(\mathbb{H}, e^{-r})$ un abierto básico de \mathcal{G} , entonces su imagen recíproca mediante C es

$$C^{-1}(B_{\mathcal{G}}(\mathbb{H}, e^{-r})) = C_{e_0, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_m},$$

donde $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$, $\alpha_{n+1} = \dots = \alpha_m = 0$, $e_0, \dots, e_n \in E$ todas las aristas de la bola $B_{\mathbb{H}}(1, r)$ y $e_{n+1} \dots e_m$ las aristas de \mathbb{G} que tienen un extremo dentro de $B_{\mathbb{H}}(1, r)$ y otro fuera de $B_{\mathbb{H}}(1, r)$, siendo $r \geq 1$. Como los cilindros son abiertos básicos de la topología de Ω , la aplicación C es continua. \square

Definición 4.67. Se denomina *subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley* \mathbb{G} definido por un proceso de percolación a una variable aleatoria

$$C : (\Omega, P) \longrightarrow (\mathcal{G}, \mathbb{P})$$

que tiene como función de distribución $\mathbb{P} = C_*(P)$.

La siguiente definición formaliza la idea intuitiva de introducir una arista entre dos vértices de un grafo de \mathcal{G} .

Definición 4.68. Llamamos *aplicación de inserción* de una arista $e \in E(\mathbb{G})$ a la aplicación

$$\begin{aligned} i_e : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ \mathbb{H} &\longmapsto \mathbb{H} \cup e \end{aligned}$$

donde $\mathbb{H} \cup e$ denota el grafo resultante de añadir la arista e (con sus correspondientes vértices si fuese necesario) al grafo \mathbb{H} .

Esta misma de añadir una arista a un grafo puede considerarse también en el espacio de coloreados haciendo que la nueva arista tenga probabilidad 1 y el resto queden igual. De igual manera, tiene sentido hablar de tolerancia a la inserción en el espacio Ω .

Definición 4.69. Se dice que una medida \mathbb{P} sobre \mathcal{G} es *tolerante a la inserción* si dada una arista $e \in E$ y un boreliano $B \in \mathcal{G}$ de medida positiva, se cumple que $\mathbb{P}(i_e(B)) > 0$.

Definición 4.70. Llamamos *aplicación de inserción* de una arista $e \in E(\mathbb{G})$ a la aplicación $i_e : \Omega \rightarrow \Omega$ definida de la siguiente manera:

$$i_e(\omega)(e') = \begin{cases} 1, & \text{si } e = e', \\ \omega(e'), & \text{si } e \neq e'. \end{cases}$$

Definición 4.71. [28] Se dice que una medida P definida sobre el espacio de configuración Ω es *tolerante a la inserción* si dada una arista $e \in E$ y un boreliano $B \in \Omega$ de medida positiva, se cumple que $P(i_e(B)) > 0$.

La acción por la derecha del grupo G sobre el grafo de Cayley \mathbb{G} induce una acción por la derecha de G sobre el espacio de configuración Ω

$$\begin{aligned}\phi : \Omega \times G &\longrightarrow \Omega \\ (\omega, g) &\mapsto \omega.g\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\omega.g : E &\longrightarrow \{0, 1\} \\ e &\mapsto \omega(e.g^{-1})\end{aligned}$$

para todo $\omega \in \Omega$, $g \in G$ y $e \in E$.

Conviene observar que la aplicación clúster C no envía la relación orbital \mathcal{R}_G en la relación \mathcal{R} de \mathcal{G} . Esto se debe a que podemos cambiar de clúster cuando cambiamos de punto base. Sin embargo, podemos establecer cierta relación entre los clústeres y el cambio del punto base como se aprecia en el siguiente lema.

Lema 4.72. *Dado $\omega \in \Omega$ y un elemento $g \in G$, se cumple la siguiente igualdad:*

$$C_1(\omega).g = C_g(\omega.g).$$

Demostración. Por definición, el grafo $\mathbb{G}(\omega.g) = \mathbb{G}(\omega).g$, luego el clúster del coloreado $\omega.g$ que contiene a g es el trasladado de $C_1(\omega)$ por g . \square

Sin embargo, el subgrafo $C_1(\omega).g$ ya no pertenece en general al espacio \mathcal{G} . En este caso estaríamos considerando ese clúster en el espacio $\tilde{\mathcal{G}}$ que describimos en la sección 4.3. Por tanto realmente estamos diciendo que $C_1(g) \equiv (C_1(\omega), 1)$ y que $C_g(\omega.g) \equiv (C_g(\omega.g), g)$.

Para evitar esta dificultad y solucionar el problema de la compatibilidad entre las relaciones \mathcal{R}_G y \mathcal{R} cambiaremos \mathcal{R}_G por una subrelación que sí sea compatible con \mathcal{R} .

Definición 4.73. Se define la *relación de equivalencia clúster* \mathcal{R}_c sobre el espacio de configuración Ω de la siguiente manera:

$$\omega \mathcal{R}_c \omega' \Leftrightarrow \exists g \in C_1(\omega) : \omega' = \omega.g^{-1}$$

donde $\omega, \omega' \in \Omega$.

De esta forma, al pedir explícitamente que el vértice al que trasladamos el punto base esté en el mismo clúster, nos garantizamos no salirnos del espacio \mathcal{G} . En efecto, en virtud del lema anterior, por ser $\omega = \omega'.g$, se tiene que $C_1(\omega) = C_g(\omega) = C_g(\omega'.g) = C_1(\omega').g$. Luego la aplicación clúster C de la definición 4.65 es compatible con las relaciones de equivalencia \mathcal{R}_c y \mathcal{R} .

Nuestro trabajo ahora consiste en imponer las condiciones necesarias a la medida de probabilidad P para estar en condiciones de aplicar el lema 4.38 de la sección 4.2.

Teorema 4.74. ([3]) Sea (Ω, P) un espacio de probabilidad. Si la medida P es ergódica, casi-invariante respecto de la relación de equivalencia \mathcal{R}_c y tolerante a la inserción, entonces cualquier conjunto cerrado $Z \subset \Omega$ minimal respecto a \mathcal{R}_\downarrow cumple la siguiente condición: $Z = \{1_E\}$ (y todas las aristas están abiertas) o $P(Z) = 0$.

Demostración. Para demostrar el teorema será cómodo identificar la configuración 1_E con el propio conjunto E . Consideremos $\{E_n\}$ una sucesión de subconjuntos finitos de aristas que recubran E . Sea i_{E_n} la composición de todas las aplicaciones de inserción i_e , con $e \in E_n$, que inserta de una vez todas las aristas de E_n . Por ser P tolerante a la inserción, podemos encontrar una base de entornos $i_{E_n}(\Omega)$ de E formada por conjuntos de medida positiva, de manera $E \in \text{sup}(P)$. Como el conjunto de aristas E es invariante por la acción de G , la clase de E es $\mathcal{R}_c[E] = \{E\}$. Estamos pues en condiciones de aplicar el lema 4.38 al espacio $X = \Omega$, las relaciones $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c = \mathcal{L} =$ y el punto $x = E$, para concluir el resultado. \square

4.6. Árbol aleatorio de Ghys-Kenyon

En esta última sección veremos que el conjunto minimal de Ghys-Kenyon puede interpretarse como un árbol aleatorio. Para ello nos basta dotar a $\Omega_{\mathbb{T}_\infty}$ de una medida de probabilidad \mathcal{R} -invariante. Para construir esta medida utilizaremos las llamadas *sucesiones de Følner*, descritas por S. E. Goodman y J. F. Plante en [16].

Como ya dijimos en la prueba de la proposición 4.50, si S es un sistema de generadores de G , entonces $\Gamma_S = \{\tau_s : s \in S\}$ es un sistema de generadores del pseudogrupo Γ . Entonces se define el borde de subconjunto $B \subset \mathcal{G}$ como el conjunto

$$\partial_{\Gamma_S} B = \{\mathbb{H} \in B : \exists s \in S \mid \mathbb{H}s^{-1} \notin B\}.$$

Definición 4.75. Se llama *sucesión de Følner* a una sucesión $\{B_n\} \subset \mathcal{G}$ de subconjuntos finitos de \mathcal{G} , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\partial_{\Gamma_S} B_n}{\#B_n} = 0.$$

Ahora bien, como ya habíamos comentado, debido a la aperiodicidad de \mathbb{T}_∞ , $\mathcal{R}[\mathbb{T}_\infty] = \{\mathbb{T}_\infty\}$ y la sucesión de árboles \mathbb{T}_n es una sucesión de Følner. En efecto, los conjuntos $B_n = \{\mathbb{T}_\infty g^{-1} : g \in \mathbb{T}_n\}$, que se identifican con los árboles \mathbb{T}_n , verifican que $\#\partial_{\Gamma_S} B_n = 4$, pero,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \#B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \#\mathbb{T}_n = \infty.$$

Como se prueba en [16], tomando una subsucesión, las medidas de probabilidad uniformes definidas por los conjuntos B_n ,

$$\mu_n(B) = \frac{\#(B \cap B_n)}{\#B_n}$$

convergen débilmente a una medida de probabilidad μ sobre el minimal $\Omega_{\mathbb{T}_\infty}$. La medida μ así definida es invariante por la acción del pseudogrupo Γ , y verifica que su soporte $\text{supp}(\mu)$ está contenido en el conjunto límite de la sucesión $\{B_n\}$ formado por los límites de las sucesiones $\{\mathbb{H}_n\}$ donde $\mathbb{H}_n \in B_n$. Luego tenemos el siguiente resultado

Proposición 4.76. *El conjunto $\Omega_{\mathbb{T}_\infty}$ admite una medida de probabilidad \mathcal{R} -invariante μ .* □

La medida μ del enunciado viene dada explícitamente por:

$$\begin{aligned} \mu(B_{\Omega_{\mathbb{T}_\infty}}(\mathbb{H}, e^{-r})) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#(B_n \cap B_{\Omega_{\mathbb{T}_\infty}}(\mathbb{H}, e^{-r}))}{\#B_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{g \in B_n : B_{\mathbb{H}}(1, r)g^{-1} = B_{\mathbb{T}_\infty}(g, r)\}}{\#B_n}. \end{aligned}$$

Además, como se puede ver en [26] y [2], la medida μ es la única medida de probabilidad definida sobre el minimal de Ghys-Kenyon que es \mathcal{R} -invariante y \mathcal{R} -ergódica. Si consideramos la inclusión del subgrafo aleatorio $\Theta : (\Omega_{\mathbb{T}_\infty}, \mu) \rightarrow \mathcal{G}$, tenemos un subárbol aleatorio de grafo de Cayley de \mathbb{Z}^2 llamado *árbol aleatorio de Ghys-Kenyon* y cuyo espacio de estados está formado únicamente por subárboles repetitivos.

Para concluir veamos que los subgrafos aleatorios del grafo de Cayley de \mathbb{Z}^2 descritos antes y el árbol aleatorio de Ghys-Kenyon son *mutuamente singulares*, es decir, cada uno es de medida nula para ley del otro. Para ello podemos usar otra vez el lema 4.38 de la sección 4.2. De hecho tenemos el siguiente resultado general que precisa el teorema 4.74:

Teorema 4.77. ([3]) *Dado un subgrafo aleatorio Θ de un grafo de Cayley \mathbb{G} con distribución \mathbb{P} casi-invariante, ergódica y tolerante a la inserción, entonces la envoltura de cualquier subgrafo repetitivo propio es de medida nula respecto de \mathbb{P} .*

Demostración. Se demuestra igual que el teorema 4.74 aplicando el lema 4.38 al espacio $X = \mathcal{G}$ con las relaciones $\mathcal{R} = \mathcal{R} = \mathcal{L}$ y el punto $x = \mathbb{G}$. □

Conclusiones

El estudio de los grafos de Cayley y Schreier y a la introducción a los espacios de grafos y a los grafos aleatorios que hemos realizado en esta memoria nos conduce de modo natural a plantear varios problemas abiertos:

1) Hemos visto que el grafo de Cayley \mathbb{G} de un grupo de tipo finito G depende de la elección de un sistema finito de generadores S , aunque su tipo de casi-isometría es independiente de esa elección. Si consideramos el espacio de Gromov-Hausdorff \mathcal{G} formado por los subgrafos de \mathbb{G} que contienen al elemento neutro, la primera cuestión que se nos plantea es cómo afecta al espacio \mathcal{G} el cambio del sistema de generadores S por S' .

El objetivo es demostrar que las relaciones de equivalencia \mathcal{R} y \mathcal{R}' definidas sobre \mathcal{G} y \mathcal{G}' son *equivalentes en el sentido de Kakutani*, es decir, son equivalentes en el sentido de Morita o representan la misma dinámica y además sus clases de equivalencia son casi-isométricas. Esto sugiere además la conveniencia de extender esta noción a los subgrafos aleatorios de grafos de Cayley y estudiar las propiedades asintóticas de este tipo de grafos aleatorios.

2) La noción de *grafo aleatorio* (según la definición D. Aldous y R. Lyons [4]) aparece por primera vez en un trabajo de R. Lyons, R. Pemantle y Y. Peres sobre árboles de Galton-Watson [27]. Recordemos que *un grafo aleatorio* es una variable aleatoria que toma valores en el espacio \mathcal{G} de las clases de isomorfía $[\mathbb{H}, x,]$ de grafos localmente finitos \mathbb{H} con punto base x , dotado de la relación de equivalencia \mathcal{R} que consiste en mover el punto base. Recíprocamente, cualquier relación de equivalencia medible puede dotarse de una estructura de grafo (en el sentido de V. A. Kaimanovich [22, 23, 24] o de D. Gaboriau en [13]) que la convierte en un grafo aleatorio. Si los estados son grafos *rígidos* (con grupo de automorfismos trivial) o *unimodulares* (con grupo de automorfismos unimodular), el concepto de *grafo aleatorio unimodular* equivale a una medida de probabilidad \mathcal{R} -invariante. El árbol aleatorio de Ghys-Kenyon es un ejemplo de grafo aleatorio con estados rígidos y cualquier subgrafo aleatorio del grafo de Cayley de \mathbb{Z}^2 es unimodular.

Como hemos visto en el capítulo 3, el teorema de Petersen-Gross demuestra que cual-

quier grafo $2n$ -regular admite una estructura o decoración de Schreier. La existencia de estructuras o decoraciones de Schreier para grafos aleatorios unimodulares y $2n$ -regulares, que había sido abordada y conjeturada en la tesis de J. Cannizzo [7], ha sido recientemente demostrada por L. M. Tóth en [35]. Como muestra el grafo aleatorio de Ghys-Kenyon construido en el capítulo 4, los estados de los subgrafos aleatorios de grafos de Cayley (es decir, las clases de equivalencia de los espacios de Gromov-Hausdorff) no son grafos de Schreier. Sin embargo, admiten decoraciones que merecen el nombre de *decoraciones de Schreier*. Nos planteamos la extensión del teorema de Tóth a cualquier subgrafo aleatorio de un grafo de Cayley o de modo más general a cualquier grafo aleatorio de valencia acotada.

Bibliografía

- [1] F. Alcalde Cuesta. *Topología*. Santiago de Compostela, 2020.
- [2] F. Alcalde Cuesta, Á. Lozano Rojo, M. Macho Stadler, Dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon. *Astérisque*, **323** (2009), 1-16.
- [3] F. Alcalde Cuesta, Á. Lozano Rojo, A. C. Vázquez Martínez, Insertion-tolerance and repetitiveness of random graphs. *Stochastics and Dynamics*, **17** (2017), 1750023.
- [4] D. Aldous, R. Lyons, Processes on Unimodular Random Networks. *Electronic Journal of Probability*, **12** (2007), 1454-1508.
- [5] M. Bermúdez, *Laminations Boréliennes*. Thèse, Université Claude Bernard-Lyon 1, 2004.
- [6] B. Bollobás, *Modern Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics **184**, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [7] J. Cannizzo, *Schreier Graphs and ergodic properties of boundary actions*. PhD Thesis, University of Ottawa, 2014.
- [8] A. Carballido, *Acciones propiamente discontinuas de grupos discretos*. Trabajo Fin de Grado, Universidad de Santiago de Compostela, 2018.
- [9] R. Diestel, *Graph theory (4 ed.)*. Graduate Texts in Mathematics **173**, Springer-Verlag, Heidelberg, 2010.
- [10] J. Dugundji, *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1996.
- [11] J. Feldman, C. C. Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras I. *Transactions of the American Mathematical Society*, **234** (1977), 289-324.
- [12] M. P. Fernández de Córdoba, *Número de ramificación y percolación de un pseudogrupo*. Tesis, Universidad de Santiago de Compostela, 2012.

- [13] D. Gaboriau, Coût des relations d'équivalence et des groupes. *Inventiones Mathematicae*, **139** (2000), 41-98.
- [14] É. Ghys, Laminations par surfaces de Riemann. *Panoramas and Synthèses*, **8** (1999), 49-95.
- [15] T. Giordano, I. Putnam, C. Skau, Affable equivalence relations and orbit structure of Cantor dynamical systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **24** (2004), 441-475.
- [16] S. E. Goodman, J. F. Plante, Holonomy and averaging in foliated sets. *Journal of Differential Geometry*, **14** (1979), 401-407.
- [17] M. Gromov, *Structure métrique pour les variétés riemanniennes*. Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981.
- [18] M. Gromov, Asymptotic Invariants of Infinite Groups, in *Geometric Group Theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*. London Mathematical Society Lecture Note Series 182, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [19] J. Gross, Every connected regular graph of even degree is a Schreier coset graph. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, **22** (1977), 227-232.
- [20] P. R. Halmos, *Measure Theory*. Van Nostrand, New York, 1950.
- [21] F. Harary, *Graph Theory*. Addison-Wesley, Reading, 1972.
- [22] V. A. Kaimanovich, Amenability, hyperfiniteness, and isoperimetric inequalities. *Comptes Rendus de la Académie de Sciences de Paris Série I Math.*, **325** (1997), 999-1004.
- [23] V. A. Kaimanovich, Equivalence relations with amenable leaves need not be amenable. *American Mathematical Society Translations Series 2*, **202** (2001), 151-166.
- [24] V. A. Kaimanovich, Equivalence relations and random graphs: an introduction to graphical dynamics. Talk in the 2012 Warwick EPSRC Symposium on *Ergodic Theory and Dynamical Systems: Perspectives and Prospects*.
- [25] R. Kallman, Certain quotient spaces are countably separated, III. *Journal of Functional Analysis* **22** (1976), 225-241.
- [26] A. Lozano Rojo, *Dinámica transversa de laminaciones definidas por grafos repetitivos*. Tesis, Universidad del País Vasco, 2008.

- [27] R. Lyons, R. Pemantle, Y. Peres, Ergodic theory on Galton-Watson trees: speed of random walk and dimension of harmonic measure. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **15** (1995), 593-619.
- [28] R. Lyons, O. Schramm, Indistinguishability of Percolation Clusters. *Annals of Probability*, **27** (1999), 1809-1836.
- [29] W. S. Massey, *Algebraic Topology: An introduction*. Springer, New York, 1977.
- [30] J. R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*. Perseus Publishing, Cambridge, 1984.
- [31] F. Paulin, Propriétés Asymptotiques des Relations d'Equivalences Mesurées Discrètes. *Markov Processes and Related Fields*, **5** (1999), 163-1200.
- [32] R. H. Schonmann, *Percolation in $\infty + 1$ dimensions at the uniqueness threshold*, in *Perplexing Problems in Probability: Festschrift in Honor of Harry Kesten*. Progress in Probability, Birkhäuser, 1999, 53-67.
- [33] P. Scott, T. Wall, Topological methods in group theory, in *Homological Group Theory*. London Mathematical Society Lecture Note Series, **36**, (1979), 137-204.
- [34] S. M. Srivastava, *A Course on Borel Sets*. Graduate Texts in Mathematics 180, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [35] L. M. Tóth, *Invariant Schreier decorations of unimodular random networks*. Preprint 2019, arXiv:1906.03137.
- [36] A. C. Vázquez, *Geometría ergódica y asintótica de grafos aleatorios*. Tesis, Universidad de Santiago de Compostela, 2018.
- [37] S. Willard, *General Topology*. Addison-Wesley, Reading, 1970.